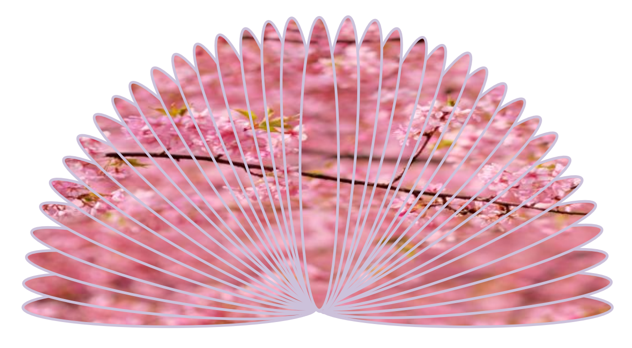
الاسم:

مختارات من أسئلة الدورات في

التحليل العقدي2

السنة الثالثة رياضيات



$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

$$I = \int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\varphi(a_j) - \sum_{k=1}^{m}\beta_k\,\varphi(b_k)\right]$$

اعداد الأستاذ

أحمد حاتم أبو حاتم

النسخة الحديثة

2016 – 2017 م



في البداية أود أن أوضح أنَّ هذه النوطة تحتوي على مسائل محلولة من مقرر التحليل العقدي 2 قمت بإعادة كتابتها وصياغتها بأسلوبي وأتمنى أن أكون قد وفقت في توصيل الأفكار والمعلومات المفيدة التي تخدم هذه المادة وتسهِّل للطلاب الدراسة من المقرر التدريسي الذي يقرره القائمين على هذه المادة.

عزيزي الطالب أرجو الانتباه:

لا تُعد هذه النوطة مقرراً تدريسياً ، وقد يختلف محتواها عن المقرر الذي يتم تدريسه في التحليل العقدي 2 ، ولكنها في النهاية تحتوي على مسائل محلولة من أسئلة الدورات تقدم دعماً إضافياً للطالب.

في النهاية أود أن أقول لكم أنني اجتهدت في أن أكون بعيداً عن الخطأ في عملي هذا وأتمنى أن أكون قد وفقت في ذلك، وإن أخطأت في شيء فهذا الخطأ ناتج عن عدم معرفة وليس خطأ غير مقصود .

إذا أحببتم أن تحلوا من هذه المسائل فعليكم مراجعة مدرس المقرر عندما تشعرون بوجود الخطأ لأنَّه يبقى النبع الصافي الذي يعطي المعلومات الأمثل.

الأستاذ

أحمد حاتم أبو حاتم

القيم العظمى والصغرى

❶ أوجد النقاط من القرص الدائري $|z|\le 1$ ، والتي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^3+4z^2-z$ قيمها العظمى ، وهل تبلغ هذه الدالة قيمتها الصغرى على محيط هذا القرص؟ ولماذا ؟

الحل:

بما أنَّ الدالة $f(z)=z^3+4z^2-z$ هي دالة شاملة فهي مستمرة على الدائرة $|z|=1$ ، وتحليلية عند النقاط التي تقع في داخلية هذه الدائرة ، وبالتالي استناداً إلى مبرهنة القيمة العظمى فإن هذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط هذا النطاق وكما أن معادلة الدائرة $|z|=1$ تعطى بالصورة : $z=e^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ ، وبالتالي فإنَّ:

$$\begin{aligned}|f(z)|^2&=(z^3+4z^2-z)\overline{(z^3+4z^2-z)}=(e^{3i\theta}+4e^{2i\theta}-e^{i\theta})\overline{(e^{3i\theta}+4e^{2i\theta}-e^{i\theta})}=\\&=(e^{3i\theta}+4e^{2i\theta}-e^{i\theta})(e^{-3i\theta}+4e^{-2i\theta}-e^{-i\theta})=\\&=1+4e^{i\theta}-e^{2i\theta}+4e^{-i\theta}+16-4e^{i\theta}-e^{-2i\theta}-4e^{-i\theta}+1=18-(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})=\\&=18-2\cos(2\theta)\end{aligned}$$

وبما أنَّ:

$$-1\le\cos(2\theta)\le 1\ \Rightarrow\ -2\le -2\cos(2\theta)\le 2\ \Rightarrow\ 16\le 18-2\cos(2\theta)\le 20$$

مما يعني أنَّ الدالة $f(z)$ تبلغ قيمتها العظمى والتي هي $|f(z)|=\sqrt{20}$ وذلك عندما تكون:

$$\cos(2\theta)=-1\ \Rightarrow\ 2\theta=\pi+2n\pi\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi\ \ ;n=0,\mp1,\mp2,\cdots$$

ومن أجل $n=0$ نحصل على: $\theta=\frac{\pi}{2}\in[0,2\pi]$ ، ومنه يكون العدد العقدي الأول الذي تبلغ عنده الدالة $f(z)$ قيمتها العظمى هو : $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$ ، ومن أجل $n=1$ نحصل على $\theta=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}\in[0,2\pi]$ ومنه يكون العدد العقدي الثاني الذي تبلغ عنده الدالة $f(z)$ قيمتها العظمى هو: $z_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$ ، ومن أجل $n=-1$ نحصل على $\theta=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}\notin[0,2\pi]$ ومن أجل $n=2$ نحصل على $\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi\notin[0,2\pi]$ ، ومنه النقاط الشاذة التي تبلغ الدالة $f(z)$ عندها قيمتها العظمى هي $z_1=i\ ,z_2=-i$ ، والقيمة العظمى للدالة $f(z)$ تساوي $\sqrt{20}$.

كما أنَّ الدالة المعطاة لا تبلغ قيمتها الصغرى على محيط الدائرة ، بل في داخليتها ، وذلك لأنَّه من أجل $z=0$ والتي تنتمي إلى داخلية القرص الدائري $|z|\le 1$ يكون : $f(z)=0$.



❷ إذا كانت $f(z)=iz^4+z^2$ فالمطلوب:

❶ أوجد جذور المعادلة $f(z)=0$.

❷ عين النقاط من القرص الدائري $|z|\le 1$ والتي تبلغ عندها الدالة قيمتها العظمى.

الحل :

❶ لنوجد جذور المعادلة $f(z)=0$ أي أن :

$$iz^4+z^2=0 \Rightarrow z^2\left(iz^2+1\right)=0$$

ومنه إما $z^2=0 \Rightarrow z=0$ أو $iz^2+1=0$ أي أن : $iz^2=-1$ ، وبالتالي فإن :

$$iz^2=-1 \Rightarrow iz^2=i^2 \Rightarrow z^2=i \Rightarrow z=(i)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$z_k=\sqrt{|i|}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)\right] ;\ k=0,1$$

$$k=0 \Rightarrow z_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k=1 \Rightarrow z_1=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فالمعادلة $f(z)=0$ تملك أربعة جذور هي :

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ ,z_3=z_4=0$$

❷ الدالة $f(z)=iz^4+z^2$ هي كثيرة حدود لذلك فهي دالة شاملة وبما أنها شاملة فهي تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وبالتالي فهي تحليلية على وضمن الدائرة $|z|=1$ ، وبما أنها تحليلية على الدائرة $|z|=1$ فهي قابلة للاشتقاق وبما أنها قابلة للاشتقاق فهي مستمرة ، إذا فالدالة $f(z)$ مستمرة على محيط الدائرة $|z|=1$ وتحليلية في داخليتها وبالتالي استناداً إلى مبرهنة القيمة العظمى فإن هذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط الدائرة وليس عند أية نقطة من نقاط داخلية هذه الدائرة ومن أجل تحديد النقاط من الدائرة التي تبلغ عندها الدالة قيمتها العظمى نفرض أنَّ $z=e^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi$ عندئذٍ :

$$|f(z)|^2=f(z).\overline{f(z)}=\left(iz^4+z^2\right)\overline{\left(iz^4+z^2\right)}=\left(ie^{4i\theta}+e^{2i\theta}\right)\overline{\left(ie^{4i\theta}+e^{2i\theta}\right)}=$$

$$=\left(ie^{4i\theta}+e^{2i\theta}\right)\left(-ie^{-4i\theta}+e^{-2i\theta}\right)=1+ie^{2i\theta}-ie^{-2i\theta}+1=2+i\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)=$$

$$=2+i\left[2i\sin(2\theta)\right]=2-2\sin(2\theta)$$

نعلم أنَّ:

$$-1\le\sin(2\theta)\le 1 \;\Rightarrow\; -2\le -2\sin(2\theta)\le 2 \;\Rightarrow\; 0\le 2-2\sin(2\theta)\le 4$$

وبالتالي تبلغ الدالة $f(z)$ قيمتها العظمى وهي 2 عندما يتحقق أنَّ:

$$\sin(2\theta)=-1 \;\Rightarrow\; 2\theta=\frac{3\pi}{2}+2n\pi \;\Rightarrow\; \theta=\frac{3\pi}{4}+n\pi \;;\; n=0,\mp 1,\mp 2,\cdots$$

نأخذ قيم الزاوية θ التي تقع ضمن المجال $[0\,,2\pi]$ بالشكل:

$$n=0 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}\in[0\,,2\pi]$$

$$n=1 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}\in[0\,,2\pi]$$

$$n=-1 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}-\pi=-\frac{\pi}{4}\notin[0\,,2\pi]$$

$$n=2 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}+2\pi\notin[0\,,2\pi]$$

وبالتالي نجد أنَّ الأعداد العقدية التي تبلغ الدالة $f(z)$ عندها قيمتها العظمى هي:

$$z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_2=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

والقيمة العظمى للدالة $f(z)$ تساوي 2 .

❸ أوجد النقاط من القرص الدائري $|z|\le 1$ التي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^2-3z$ قيمتها العظمى.

الحل :

بما أنَّ الدالة $f(z)$ هي دالة شاملة لأنها كثيرة حدود ، وبالتالي فإن هذه الدالة تحليلية في كل نقطة من المستوي العقدي وبالتالي فهي تحليلية على محيط الدائرة $|z|=1$ وفي داخليتها ، وبما أن الدالة $f(z)$ تحليلية على محيط الدائرة $|z|=1$ ، فهي قابلة للاشتقاق وبالتالي فهي مستمرة على محيط هذه الدائرة ، إذاً أصبحت الدالة $f(z)$ مستمرة على محيط الدائرة $|z|=1$ وتحليلية في داخلية هذه الدائرة وبالتالي استناداً إلى مبرهنة القيمة العظمى فإن الدالة $f(z)$ تبلغ قيمتها العظمى على محيط الدائرة ، ومن أجل إيجاد النقاط التي تبلغ الدالة $f(z)$ قيمتها العظمى نفرض أن $z=e^{i\theta}\;;\;0\le\theta\le 2\pi$ عندئذٍ :

$$|f(z)|^2=f(z).\overline{f(z)}=(z^2-3z)\overline{(z^2-3z)}=\left(e^{2i\theta}-3e^{i\theta}\right)\overline{\left(e^{2i\theta}-3e^{i\theta}\right)}=$$

$$=\left(e^{2i\theta}-3e^{i\theta}\right)\left(e^{-2i\theta}-3e^{-i\theta}\right)=1-3e^{i\theta}-3e^{-i\theta}+9=10-3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=10-6\cos\theta$$

نعلم أنَّ:

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \;\Rightarrow\; -6 \le -6\cos\theta \le 6 \;\Rightarrow\; 4 \le 10-6\cos\theta \le 16$$

إنَّ الدالة $f(z)$ تبلغ قيمة العظمى عندما يتحقق :

$$\cos\theta = -1 \;\Rightarrow\; \theta = \pi + 2n\pi \quad ; \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots\cdot$$

نأخذ قيم الزاوية θ التي تقع ضمن المجال $[0, 2\pi]$ بالشكل:

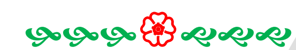
$$n = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \pi \in [0, 2\pi]$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; \theta = \pi + 2\pi \notin [0, 2\pi]$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; \theta = \pi - 2\pi \notin [0, 2\pi]$$

وبالتالي نجد أنَّ الأعداد العقدية التي تبلغ الدالة $f(z)$ عندها قيمتها العظمى هي:

$z_1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ ، والقيمة العظمى للدالة $f(z)$ هي 4 .



النقاط الشاذة وأنواعها ونشر لورانت (لوران)

تعريف النقطة الشاذة: نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة شاذة للدالة $f(z)$ إذا كانت هذه الدالة غير معرفة عند النقطة z_0.

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f(z)$ معرفة عند النقطة z_0 عندئذٍ نقول أن النقطة z_0 هي نقطة عادية للدالة $f(z)$.

أنواع النقاط الشاذة :

تقسم النقاط الشاذة إلى نوعين: نقاط شاذة معزولة، ونقاط شاذة غير معزولة.

النقطة الشاذة المعزولة : تكون النقطة الشاذة z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ إذا أمكن إيجاد جوار للنقطة الشاذة z_0 لا يحوي أي نقطة شاذة غيرها .

النقطة الشاذة غير المعزولة : تكون النقطة الشاذة z_0 نقطة شاذة غير معزولة للدالة $f(z)$ إذا كان أي جوار للنقطة الشاذة z_0 يحوي نقاط شاذة غيرها ، وفي هذه الحالة تكون النقطة z_0 هي نهاية لمتتالية من النقاط الشاذة.

تطبيق : هات مثالاً على نقطة شاذة معزولة ، ومثالاً آخر على نقطة شاذة غير معزولة .

الحل :

❶ إنَّ النقطة $z=1$ هي نقطة شاذة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ ، وهي نقطة شاذة معزولة لأن الجوار الذي مركزه النقطة الشاذة $z=1$ ونصف قطره يساوي الواحد يحوي على النقطة الشاذة $z=1$ فقط ، وكذلك النقطة الشاذة $z=-2$ هي نقطة شاذة معزولة لأنَّ الجوار الذي مركزه النقطة الشاذة $z=-2$ ونصف قطره يساوي الواحد يحوي على النقطة الشاذة $z=-2$ فقط .

❷ إنَّ النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$ ، وهي نقطة شاذة غير معزولة ولنوضح ذلك:

إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة :

$$\sin(\pi/z)=0 \;\Rightarrow \frac{\pi}{z}=n\pi \;;\quad n=0,\mp1,\mp2,\ldots.. \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z}=n \;;\; n=0,\mp1,\mp2,\ldots.. \;\Rightarrow\; z=\frac{1}{n} \;;\; n=0,\mp1,\mp2,\ldots..$$

ومن الواضح أن نهاية متتالية النقاط الشاذة $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ عندما تسعى n نحو اللانهاية تساوي الصفر ، أي أن النقطة $z=0$ هي نهاية للمتتالية $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ وبالتالي فإن أي جوار $z=0$ يحوي على عدد غير منته من حدود المتتالية أي على عدد غير منته من النقاط الشاذة ، ومنه نستنتج أن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة غير معزولة .

ملاحظة : لسنا بصدد دراسة النقاط الشاذة غير المعزولة .

أنواع النقاط الشاذة المعزولة :

- **نقطة شاذة قابلة للإصلاح (قابلة للإزالة) :** نقول عن النقطة الشاذة z_0 أنها نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \quad ; \; \alpha \neq \infty$$

ملاحظة: في هذه الحالة نكون أمام حالة عدم تعيين ونستخدم أوبيتال مثلاً لإزالة عدم التعيين والنهاية تكون محدودة .

- **قطب :** نقول عن النقطة الشاذة z_0 أنها نقطة قطب للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

ويتم تحديد رتبة القطب بالشكل :

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] = \beta \quad ; \; (\beta \neq 0 \; , \; \beta \neq \infty)$$

وفي هذه الحالة نقول عن النقطة z_0 أنها قطب من المرتبة n للدالة $f(z)$ ، وفي الحالة التي يكون فيها $n = 1$ عندئذٍ نقول عن النقطة z_0 أنها قطب بسيط للدالة $f(z)$.

- **نقطة شاذة أساسية :** نقول عن النقطة الشاذة z_0 أنها نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت النهاية للدالة $f(z)$ عندما تسعى z نحو z_0 غير موجودة .

ملاحظة : لإثبات أنَّ النهاية غير موجودة نثبت أنَّ النهاية تتعلق بالطريق المسلوك، أي أنَّ النهاية على الطريق الأول لا تساوي النهاية على الطريق الثاني.

أمثلة:

أوجد النقاط الشاذة للدوال التالية، ثمَّ صنفها:

❶ $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, ❷ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)^3}$, ❸ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ هي فقط النقطة $z = 0$ وهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح لأن:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right) = \frac{0}{0}$$

نحن أمام حالة عدم تعيين، ولنزيل عدم التعيين بتطبيق قاعدة أوبيتال بالشكل:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{1}\right)=1$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)^3}$ هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$(z-1)(z+2)^3=0 \Rightarrow z=1 \ , \ z=-2$$

إنَّ النقطة الشاذة $z=1$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ وذلك لأنَّ:

❶ $$\lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}=\infty$$

❷ $$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)f(z)\right]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}\right]=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{(z+2)^3}\right]=\frac{1}{27}$$

إنَّ النقطة الشاذة $z=-2$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ وذلك لأنَّ:

❶ $$\lim_{z\to -2} f(z)=\lim_{z\to -2}\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}=\infty$$

❷ $$\lim_{z\to -2}\left[(z+2)^3 f(z)\right]=\lim_{z\to -2}\left[(z+2)^3\frac{1}{(z-1)(z+2)^3}\right]=\lim_{z\to -2}\left[\frac{1}{(z-1)}\right]=-\frac{1}{3}$$

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ هي النقطة $z=0$ وهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ وذلك لأن النهاية تتعلق بالطريق المسلوك ، فعندما يسعى z نحو الصفر وهو حقيقي موجب أي أن $x>0 \ ; \ z=x$ نجد أنَّ:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$$

وعندما يسعى z نحو الصفر وهو حقيقي سالب أي أن $x<0 \ ; \ z=x$ نجد أن :

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\xrightarrow{<}0} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$$

ومن الواضح أن النهايتين غير متساويتين وبالتالي نستنتج أن نهاية $f(z)$ عندما يسعى z نحو الصفر غير موجودة وبالتالي نستنتج أن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$.

ملاحظة هامة : نقول عن النقطة z_0 أنَّها صفر (جذر) للدالة $f(z)$ إذا تحقق $f(z_0)=0$ ، ونقول عن النقطة z_0 أنها صفر من الدرجة n للدالة $f(z)$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$f(z_0)=0 \ , \ f'(z_0)=0 \ , \ f''(z_0)=0 \ , \ \cdots\cdots\cdots \ , \ f^{(n-1)}(z_0)=0 \ , \ f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

ملاحظات هامة جداً :

❶ إذا كانت النقطة z_0 صفر من الدرجة الأولى للدالة $f(z)$ فهي قطب بسيط للدالة $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ ، وإذا كانت النقطة z_0 صفر من الدرجة n للدالة $f(z)$ فهي قطب من الرتبة n للدالة $g(z)=\frac{1}{f(z)}$.

❷ إذا كانت النقطة z_0 قطب من الرتبة n للدالة $f(z)$ فهي قطب من الرتبة $n.m$ للدالة $g(z)=[f(z)]^m$.

❸ إذا كانت النقطة z_0 قطب من الرتبة n للدالة $f(z)$ ، وقطب من الرتبة m للدالة $g(z)$ فهي قطب من الرتبة $n+m$ للدالة $h(z)=f(z).g(z)$.

❹ إذا كانت النقطة z_0 قطب للدالة $f(z)$ وقطب للدالة $g(z)$ فليس من الضروري أن تكون قطب للدالة $h(z)=f(z)+g(z)$.

❺ إذا كانت النقطة z_0 صفر من الدرجة n للدالة $f(z)$ وصفر من الدرجة m للدالة $g(z)$ ، فإن النقطة z_0 تكون للدالة $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح إذا كانت $n\geq m$ ، وقطب من الرتبة $m-n$ إذا كانت $m>n$.

❻ إذا كانت النقطة z_0 قطب للدالة $f(z)$ ، عندئذٍ تكون نقطة شاذة أساسية للدوال التالية :

$$\operatorname{ch}[f(z)]\ ,\ \operatorname{sh}[f(z)]\ ,\ \cos[f(z)]\ ,\ \sin[f(z)]\ ,\ e^{f(z)}\ .$$

أمثلة محلولة :

أولاً : أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية :

❶ $f_1(z)=\frac{1}{\cos z-\sin z}$

❷ $f_2(z)=z^{-2}\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$

❸ $f_3(z)=\frac{3z^2-1}{(z^2-2iz+3)^2}$

❹ $f_4(z)=z^3e^{\frac{1}{2z-2}}$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة :

$$\cos z-\sin z=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z\right)=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos z-\sin\frac{\pi}{4}\sin z\right)=0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow \cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow z+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots \Rightarrow$$

$$z=\frac{\pi}{4}+n\pi\;;n=0\,,\pm1\,,\pm2,....$$

وبما أنَّ النقاط الشاذة $z=\frac{\pi}{4}+n\pi\;;n=0\,,\pm1\,,\pm2,....$ هي أصفار من الدرجة الأولى للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_1(z)$.

❷ إنَّ الدالة $f_2(z)$ تكتب بالشكل : $f_2(z)=\dfrac{\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{z^2}$ ، وبالتالي فإن النقاط الشاذة لها هي جذور المعادلة $z^2=0$ أي أنَّ النقطة الشاذة الوحيدة لهذه الدالة هي $z=0$ ، ومن الواضح أنَّها صفر من الدرجة الثانية للمقام، أما بالنسبة للبسط:

$$f(z)=\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f'(z)=-\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow f'(0)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq0$$

أي أنَّ النقطة $z=0$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $f(z)=\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ فهي صفر من الدرجة الثانية للدالة $f^2(z)=\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ أي أنَّ النقطة الشاذة $z=0$ هي صفر من الدرجة الثانية للبسط ، وبالتالي بما أنَّ درجة الصفر $z=0$ في البسط تساوي درجتها في المقام فالنقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_2(z)$.

أو بحسب النهاية :

$$\lim_{z\to0}f_2(z)=\lim_{z\to0}\frac{\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{z^2}=\frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال :

$$\lim_{z\to0}f_2(z)=\lim_{z\to0}\frac{-2\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{2z}=\lim_{z\to0}\frac{-\sin(2z+\pi)}{2z}=\frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال مرة ثانية :

$$\lim_{z\to0}f_2(z)=\lim_{z\to0}\frac{-2\cos(2z+\pi)}{2}=\frac{2}{2}=1\neq\infty$$

وبالتالي نستنتج أن النقطة الشاذة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح .

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي جذور المعادلة :

$$\left(z^{2}-2iz+3\right)^{2}=0 \;\Rightarrow\; z^{2}-2iz+3=0 \;\Rightarrow\; \Delta=\left(-2i\right)^{2}-4(1)(3)=-4-12=-16=16i^{2}$$

$$\sqrt{\Delta}=4i \;\Rightarrow\; z_{1}=\frac{-(-2i)+4i}{2}=\frac{6i}{2}=3i \quad , \quad z_{2}=\frac{-(-2i)-4i}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

إنَّ النقطتان الشاذتان z_1,z_2 هما أصفار بسيطة للدالة $z^{2}-2iz+3$ فهي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $\left(z^{2}-2iz+3\right)^{2}$ أي أنَّها أصفار من الدرجة الثانية للمقام وبما أنَّ كل من z_1,z_2 لا تعدم البسط فإنَّ النقطتان الشاذتان $z_1=3i \;, z_2=-i$ هما أقطاب من الرتبة الثانية.

❹ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_4(z)$ هي جذور المعادلة : $2z-2=0$ أي أن النقطة الشاذة الوحيدة هي $z=1$ ، وبما أنها $z=1$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $2z-2$ فهي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{2z-2}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{2z-2}}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_4(z)=z^{3}e^{\frac{1}{2z-2}}$.

ثانياً: ما رتبة القطب للدالة: $f(z)=\frac{1}{\left(2\cos z-2+z^{2}\right)^{2}}$ عند $z=0$ مع التعليل .

الحل:

من أجل تحديد رتبة القطب $z=0$ للدالة المعطاة نأخذ دالة المقام : $h(z)=2\cos z-2+z^{2}$ ، نلاحظ أنَّ:

$$\begin{aligned}
&h(0)=0\\
&h'(z)=-2\sin z+2z \;\Rightarrow\; h'(0)=0\\
&h''(z)=-2\cos z+2 \;\Rightarrow\; h''(0)=0\\
&h'''(z)=2\sin z \;\Rightarrow\; h'''(0)=0\\
&h^{(4)}(z)=2\cos z \;\Rightarrow\; h^{(4)}(0)=2\neq 0
\end{aligned}$$

أي أنَّ $z=0$ هي صفر من الدرجة الرابعة للدالة $h(z)$ وبالتالي فهي من الدرجة الثامنة للدالة $\left[h(z)\right]^{2}=\left(2\cos z-2+z^{2}\right)^{2}$ ، وبالتالي فإنَّ $z=0$ هي قطب من الرتبة الثامنة للدالة :

$$f(z)=\frac{1}{\left(2\cos z-2+z^{2}\right)^{2}}=\frac{1}{\left[h(z)\right]^{2}} .$$



ثالثاً: كوّن دالة f تحليلية في المستوي العقدي ما عدا عند النقاط الشاذة المعزولة التي تحقق الشروط f لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z=0$ ، وقطب من الرتبة 6 عند $z=1$ ونقطة شاذة أساسية عند $z=i$.

الحل :

يوجد عدد غير منته من الإجابات لهذا السؤال مثل :

$$f(z)=\frac{\sin z\, e^{\left(\frac{1}{z-i}\right)}}{z(z-1)^6} \quad \text{أو} \quad g(z)=\frac{(e^z-1)}{z(z-1)^6}\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)$$

رابعاً: أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية :

❶ $f_1(z)=\frac{\sin(3z)}{z^2}-\frac{3}{z}$ ، ❷ $f_2(z)=\frac{1}{e^z-1}$ ، ❸ $f_3(z)=z^3e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$

الحل :

❶ إنَّ الدالة $f_1(z)=\frac{\sin(3z)}{z^2}-\frac{3}{z}$ تكتب بالشكل: $f_1(z)=\frac{\sin(3z)-3z}{z^2}$ ، ومن الواضح أنَّ النقاط الشاذة لهذه الدالة هي $z=0$ وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to 0} f_1(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(3z)-3z}{z^2}=\frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال:

$$\lim_{z\to 0} f_1(z)=\lim_{z\to 0}\frac{3\cos(3z)-3}{2z}=\frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال مرة ثانية:

$$\lim_{z\to 0} f_1(z)=\lim_{z\to 0}\frac{-9\sin(3z)}{2}=\frac{0}{2}=0\neq\infty$$

مما يعني أنَّ النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح .

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)=\frac{1}{e^z-1}$ هي جذور المعادلة :

$$e^z-1=0 \;\Rightarrow\; e^z=1 \;\Rightarrow\; z=2n\pi i \quad ; n=0,\pm1,\pm2,....$$

وهي أقطاب بسيطة وذلك لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط أو يمكن أن نكتب اعتماداً على طريقة النهاية أنَّ:

$$\lim_{z\to 2n\pi i} f_2(z)=\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

وبالتالي فإن النقاط الشاذة $z=2n\pi i$ هي أقطاب وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to 2n\pi i}(z-2n\pi i)f_2(z)=\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{(z-2n\pi i)}{e^z-1}=\frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال:

$$\lim_{z\to 2n\pi i}(z-2n\pi i)f_2(z)=\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{(z-2n\pi i)}{e^z-1}=\lim_{z\to 2n\pi i}\frac{1}{e^z}=\frac{1}{1}=1$$

وبالتالي نستنتج أنَّ النقاط الشاذة $z=2n\pi i \quad ; n=0,\pm1,\pm2,....$ هي أقطاب بسيطة .

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)=z^3 e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$ هي جذور المعادلة : $z-2i=0$ أي النقطة $z=2i$ وهي صفر من الدرجة الأولى للدالة $z-2i$ وبالتالي فهي قطب من الرتبة الأولى للدالة $\frac{1}{z-2i}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$ وبالتالي فإن النقطة $z=2i$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_3(z)=z^3 e^{\left(\frac{1}{z-2i}\right)}$.

خامساً : أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية :

❶ $f_1(z)=\frac{e^z-z-1}{z^3}$, ❷ $f_2(z)=\frac{1}{\cos^2 z-\sin^2 z}$, ❸ $f_3(z)=z^{-2}\cos^3(\pi z)$

الحل :

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)=\frac{e^z-z-1}{z^3}$ هي النقطة $z=0$ وهي قطب من الرتبة الأولى لأنَّ:

$$\lim_{z\to 0} f_1(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-z-1}{z^3}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{3z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{6z}\right)=\frac{1}{0}=\infty$$

أي أنَّ $z=0$ قطب وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to 0} z\,f_1(z)=\lim_{z\to 0} z\left(\frac{e^z-z-1}{z^3}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-z-1}{z^2}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{2z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

فإنَّ $z=0$ هو قطب من الرتبة الأولى .

❷ إنَّ الدالة $f_2(z)=\dfrac{1}{\cos^2 z-\sin^2 z}$ تكتب بالشكل: $f_2(z)=\dfrac{1}{\cos(2z)}$ ، وبالتالي فإن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي جذور المعادلة:

$$\cos(2z)=0 \Rightarrow 2z=\frac{\pi}{2}+n\pi \Rightarrow z=\frac{\pi}{4}+\frac{n}{2}\pi \ ; \ n=0,\pm1,\pm2,....$$

وبما أنَّ هذه النقاط هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $\cos(2z)$ وبالتالي فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_2(z)=\dfrac{1}{\cos(2z)}$.

❸ إنَّ الدالة $f_3(z)=z^{-2}\cos^3(\pi z)$ تكتب بالشكل: $f_3(z)=\dfrac{\cos^3(\pi z)}{z^2}$ وبالتالي فالنقاط الشاذة لها هي النقطة $z=0$ وهي قطب من الرتبة الثانية لأنَّها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط أو بحسب النهاية:

$$\lim_{z\to0} f_1(z)=\lim_{z\to0}\frac{\cos^3(\pi z)}{z^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

أي أنَّ $z=0$ هي قطب وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to0} z^2 f_1(z)=\lim_{z\to0} z^2\left(\frac{\cos^3(\pi z)}{z^2}\right)=\lim_{z\to0}\cos^3(\pi z)=1$$

إذاً $z=0$ هي قطب من الرتبة الثانية .



سادساً: أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية:

$$❶\ f(z)=\frac{\pi}{z^2\tan z} \quad , \quad ❷\ g(z)=\frac{\sin z}{\operatorname{sh} z} \quad , \quad ❸\ \psi(z)=\frac{\cos(2z)-1}{\sin^2 z}$$

الحل:

❶ إنَّ الدالة $f(z)=\dfrac{\pi}{z^2\tan z}$ تكتب بالشكل: $f(z)=\dfrac{\pi\cos z}{z^2\sin z}$ والنقاط الشاذة لهذه الدالة هي جذور المعادلة:

$$z^2\sin z=0 \Rightarrow z^2=0 \ \wedge\ \sin z=0 \Rightarrow z=0 \ \wedge\ z=n\pi \ ; n=0,\pm1,\pm2,....$$

ومن أجل $n=0$ نجد أن $z=0$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $\sin z$ ، وأيضاً $z=0$ هي صفر من الدرجة الثانية للدالة z^2 وبالتالي فإن $z=0$ هي صفر من الدرجة الثالثة للدالة $z^2\sin z$ أي للمقام وبما أنها ليست صفراً للبسط فهي إذاً قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ ، أما النقاط $z=n\pi \ ; n=\pm1,\pm2,....$ هي أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط إذاً فهي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$.

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $g(z)=\dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} z}$ هي جذور المعادلة :

$$\operatorname{sh} z = 0 \Rightarrow z = n\pi i \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

من أجل $n = 0$ نحصل على النقطة الشاذة $z = 0$ وهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وذلك لأنَّ:

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} z} = \frac{0}{0}$$

نستخدم أوبيتال:

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{\operatorname{sh} z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{\operatorname{ch} z} = \frac{1}{1} \neq \infty$$

أما النقاط الشاذة $z = n\pi i \; ; \; n = \pm 1, \pm 2, ...$ فهي أقطاب بسيطة لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط .

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $\psi(z) = \dfrac{\cos(2z) - 1}{\sin^2 z}$ هي جذور المعادلة :

$$\sin^2 z = 0 \Rightarrow \sin z = 0 \Rightarrow z = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

وهي نقاط شاذة قابلة للإصلاح وذلك لأنها أصفار للمقام من الدرجة الثانية ، وأصفار للبسط من الدرجة الثانية أيضاً ولنوضح ذلك بأن نأخذ دالة البسط : $h(z) = \cos(2z) - 1$ ومنه :

$$h(z) = \cos(2z) - 1 \Rightarrow h(n\pi) = \cos(2n\pi) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$h'(z) = -2\sin(2z) \Rightarrow h'(n\pi) = -2\sin(2n\pi) = 0$$
$$h''(z) = -4\cos(2z) \Rightarrow h''(n\pi) = -4\cos(2n\pi) = -4 \neq 0$$

أي أنَّ النقاط الشاذة $z = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ هي أصفار للمقام من الدرجة الثانية .

ووجدنا أنَّ النقاط $z = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ هي أصفار للدالة $\sin z$ من الدرجة الأولى ، وبالتالي فهي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $\sin^2 z$ أي أصفار من الدرجة الثانية للمقام ، مما سبق نستنتج أن النقاط $z = n\pi \; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ وهي نقاط شاذة قابلة للإصلاح للدالة $\psi(z)$.

سابعاً: أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية :

❶ $f(z) = \tan z - \dfrac{1}{z}$, ❷ $g(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\operatorname{sh} z}$, ❸ $\psi(z) = \dfrac{1}{\cos(3z) + 3\cos z}$

الحل :

❶ إنَّ الدالة $f(z) = \tan z - \dfrac{1}{z}$ تكتب بالشكل: $f(z) = \dfrac{\sin z}{\cos z} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{z \sin z - \cos z}{z \cos z}$ والنقاط الشاذة لهذه الدالة هي جذور المعادلة : $z \cos z = 0$ أي :

$$z=0 \quad \wedge \quad z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\; ; \; n=0,\pm1,\pm2,....$$

إنَّ النقاط الشاذة $z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\; ; \; n=0,\pm1,\pm2,....$ $\wedge$ $z=0$ هي أصفار من الدرجة الأولى للدالة $z\cos z$ أي للمقام وليست أصفاراً للبسط فهي أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$.

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $g(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\operatorname{sh} z}$ هي جذور المعادلة :

$$\operatorname{sh} z=0 \Rightarrow z=n\pi i \quad ; \; n=0,\pm1,\pm2,....$$

بالإضافة إلى النقطة $z=0$ ، وبما أنَّ النقطة $z=0$ هي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $g(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\operatorname{sh} z}$ ، أما النقاط الشاذة $z=n\pi i \quad ; \; n=\pm1,\pm2,....$ فهي أقطاب بسيطة للدالة $g(z)$ لأنها أصفار من الدرجة الأولى للدالة $\operatorname{sh} z$ (أي للمقام) وليست أصفاراً للبسط .

❸ إيجاد النقاط الشاذة للدالة $\psi(z)=\frac{1}{\cos(3z)+3\cos z}$:

الحل:

نعلم أنَّ: $\cos(3z)=4\cos^3 z-3\cos z$ ، وبالتالي فإن الدالة $\psi(z)$ تكتب بالشكل التالي:

$$\psi(z)=\frac{1}{\cos(3z)+3\cos z}=\frac{1}{4\cos^3 z-3\cos z+3\cos z}=\frac{1}{4\cos^3 z}$$

وبالتالي فإن النقاط الشاذة للدالة $\psi(z)$ هي جذور المعادلة :

$$4\cos^3 z=0 \Rightarrow \cos z=0 \Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\; ; \; n=0,\pm1,\pm2,....$$

إنَّ النقاط الشاذة $z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\; ; \; n=0,\pm1,\pm2,....$ هي أصفار للدالة $\cos z$ من الدرجة الأولى وبالتالي فهي أصفار من الدرجة الثالثة للدالة $4\cos^3 z$ وبالتالي فهي أقطاب من الرتبة الثالثة للدالة $\psi(z)=\frac{1}{4\cos^3 z}$.

ثامناً : ما رتبة القطب للدالة: $f(z)=\frac{1}{\left(\sin(3z)-3\sin z\right)^2}$ عند $z=0$ مع التعليل .

الحل :

لنأخذ الدالة: $h(z)=\left(\sin(3z)-3\sin z\right)^2$ ، وبما أننا نعلم أنَّ: $\sin(3z)=3\sin z-4\sin^3 z$ فإننا نجد أنَّ:

$$h(z)=\left(\sin(3z)-3\sin z\right)^2=\left(3\sin z-4\sin^3 z-3\sin z\right)^2=\left(-4\sin^3 z\right)^2=16\sin^6 z$$

وبما أنَّ النقطة $z=0$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $\sin z$ وذلك لأنَّ:

$$g(z)=\sin z \Rightarrow g(0)=\sin(0)=0$$
$$g'(z)=\cos z \Rightarrow g'(0)=\cos(0)=1\neq 0$$

فهي صفر من الدرجة السادسة للدالة $h(z)=16\sin^6 z$ ، وبالتالي فإن النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة السادسة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{h(z)}$.

تاسعاً: أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية:

❶ $f_1(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$, ❷ $f_2(z)=\dfrac{1}{z^2\text{sh}z}e^{\frac{1}{z-\pi}}$, ❸ $f_3(z)=\dfrac{6z-\pi}{2\sin z-1}e^{\frac{1}{z-2}}$

الحل :

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة:

$$e^z-1=0 \Rightarrow e^z=1 \Rightarrow z=2n\pi i \;\; ; \;\; n=0,\mp1,\mp2,.....$$

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=0$ وهي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى وبالتالي فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_1(z)$ ، أما باقي النقاط الشاذة $z=2n\pi i \;\; ; \;\; n=\mp1,\mp2,.....$ فهي أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_1(z)$.

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي:

أولاً: جذور معادلة المقام للدالة الأسية $e^{\frac{1}{z-\pi}}$ أي جذور المعادلة $z-\pi=0$ ومنه فإنَّ $z=\pi$ وهي صفر من الدرجة الأولى للدالة $z-\pi$ وبالتالي فهي قطب بسيط للدالة $\dfrac{1}{z-\pi}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z-\pi}}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_2(z)=\dfrac{1}{z^2\text{sh}z}e^{\frac{1}{z-\pi}}$.

ثانياً: جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2\text{sh}z=0$$

ومنه فإنَّ :

$$z^2=0 \Rightarrow z=0 \quad \& \quad \text{shz}=0 \Rightarrow z=n\pi i \quad ; \; n=0,\mp1,\mp2,.....$$

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=0$ وهي صفر من الدرجة الأولى للدالة shz ، وكما أنَّ $z=0$ هي صفر من الدرجة الثانية للدالة z^2 وبالتالي فهي صفر من الدرجة الثالثة لدالة الجداء $z^2\text{shz}$ أي للمقام وكما أنها ليست صفراً للبسط وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f_2(z)$ ، أما باقي النقاط $z=n\pi i \; ; \; n=\mp1,\mp2,.....$ فهي أصفار للدالة shz من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للدالة z^2 وبالتالي تبقى أصفاراً من الدرجة الأولى لدالة الجداء $z^2\text{shz}$ أي للمقام وكما أنها ليست أصفاراً للبسط وبالتالي فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_2(z)$.

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي:

أولاً: جذور معادلة المقام في الدالة الأسية $e^{\frac{1}{z-2}}$ أي جذور المعادلة $z-2=0$ ومنه فإنَّ $z=2$ وهي صفر من الدرجة الأولى للدالة $z-2$ وبالتالي فهي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z-2}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z-2}}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_3(z)=\frac{6z-\pi}{2\sin z-1}e^{\frac{1}{z-2}}$.

ثانياً: جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

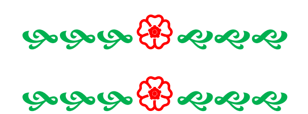
$$2\sin z-1=0$$

ومنه فإنَّ :

$$2\sin z=1 \Rightarrow \sin z=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin z=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$z=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2n\pi \\ \pi-\frac{\pi}{6}+2n\pi\end{cases} \Rightarrow z=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2n\pi \\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi\end{cases} \quad ; \; n=0,\mp1,\mp2,.....$$

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{6}$ وهي صفر للمقام من الدرجة الأولى، وكما أنَّها صفر للبسط من الدرجة الأولى وبالتالي فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_3(z)$ ، أما باقي النقاط الشاذة فهي أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط وبالتالي فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_3(z)$.



أمثلة هامة:

❶ عين وصنف النقاط الشاذة في المستوي العقدي للدالتين :

$$❶\ f_1(z)=\frac{16z^2-\pi^2}{\cos z+\sin z}e^{\frac{2}{4z+\pi}} \quad , \quad ❷\ f_2(z)=(z-2)\frac{e^{-z}}{z^3+2z^2-3z-10}$$

الحل:

❶ إنَّ النقطة $z=-\frac{\pi}{4}$ هي قطب بسيط للدالة $\frac{2}{4z+\pi}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{2}{4z+\pi}}$، كما أنَّ النقطة $z=-\frac{\pi}{4}$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $\frac{16z^2-\pi^2}{\cos z+\sin z}$ لأنها صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى أيضاً .

مما سبق نستنتج أنَّ النقطة $z=-\frac{\pi}{4}$ هي نقطة شاذة أساسية لدالة الجداء $f_1(z)=\frac{16z^2-\pi^2}{\cos z+\sin z}e^{\frac{2}{4z+\pi}}$

أما باقي النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ فهي جذور معادلة المقام:

$$\cos z+\sin z=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z\right)=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos z\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin z\ \sin\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow \cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow z-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ;\ n=0,\pm1,\pm2,....$$

$$z=\frac{3\pi}{4}+n\pi\ ;\ n=0,\pm1,\pm2,....$$

من أجل $n=-1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=-\frac{\pi}{4}$ ووجدنا أنها نقطة شاذة أساسية .

أما باقي النقاط $z=\frac{3\pi}{4}+n\pi\ ;\ n=0,+1,\pm2,....$ فهي أقطاب بسيطة لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط .

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي جذور معادلة المقام :

$$z^3+2z^2-3z-10=0 \Rightarrow (z-2)(z^2+4z+5)=0 \Rightarrow$$

$$z-2=0 \Rightarrow z=2$$

$$z^2+4z+5=0 \Rightarrow \Delta=16-4(1)(5)=16-20=-4=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$$

$$z_1=\frac{-4+2i}{2}=-2+i \quad , \quad z_2=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$$

وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to 2} f_2(z)=\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)e^{-z}}{z^3+2z^2-3z-10}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين لإزالتها نطبق قاعدة أوبيتال :

$$\lim_{z\to 2} f_2(z)=\lim_{z\to 2}\frac{e^{-z}-(z-2)e^{-z}}{3z^2+4z-3}=\frac{e^{-2}}{17}$$

وبالتالي نستنتج أن النقطة $z=2$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح .

أما النقاط $z_2=\dfrac{-4-2i}{2}=-2-i \quad , \quad z_1=\dfrac{-4+2i}{2}=-2+i$ فهي أقطاب بسيطة لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط .

❷ أوجد وصنف النقاط الشاذة للدالتين الآتيتين:

$$❶\ f_1(z)=\frac{(z-\pi)(e^z-1)}{\sin z} \quad , \quad ❷\ f_2(z)=\frac{(z-2)}{z^3-6z^2+12z-8}e^{\frac{1}{z-1}}$$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة $\sin z=0$ ومنه فإنَّ: $z=n\pi \ ; \ n=0,\mp1,\mp2,....$ ، ومن أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=0$ وهي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى وبالتالي فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_1(z)$ ، ومن أجل $n=1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\pi$ وهي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى وبالتالي فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f_1(z)$ أما باقي النقاط الشاذة $z=n\pi \ ; \ n=-1,\mp2,....$ فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_1(z)$ كونها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط .

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي:

أولاً: جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^3-6z^2+12z-8=0$$

أي جذور المعادلة $(z-2)^3=0$، أي أنَّ النقطة الشاذة هي $z=2$ ، وهي صفر للمقام من الدرجة الثالثة وصفر للبسط من الدرجة الأولى، وبالتالي فهي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f_2(z)$.

ثانياً: جذور معادلة المقام في الدالة الأسية أي جذور المعادلة:

$$z-1=0 \Rightarrow z=1$$

وبما أنَّ $z=1$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $z-1$ فهي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z-1}$ ، وبالتالي هي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z-1}}$ ، وبالتالي تبقى نقطة شاذة أساسية للدالة $f_2(z)=\dfrac{(z-2)}{z^3-6z^2+12z-8}e^{\frac{1}{z-1}}$.

تحديد أنواع النقاط الشاذة من خلال النشر

لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ ونريد معرفة نوع هذه النقطة عن طريق النشر عندئذٍ ننشر الدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 في جوار مركزه النقطة الشاذة z_0 ونصف قطره r هو المسافة بين مركز النشر وأقرب نقطة شاذة منه أي في الجوار $0<|z-z_0|<r$ وطبعاً هذه الجوار موخوذ في المركز وذلك لأنَّ مركز النشر نقطة شاذة ونميز الحالات التالية:

أولاً : تكون النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة $f(z)$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $0<|z-z_0|<r$ من الشكل :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ; \quad 0<|z-z_0|<r$$

أي أنَّ الجزء الرئيسي (الجزء ذو القوى السالبة للحد $(z-z_0)$) معدوم بالكامل .

ثانياً : تكون النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة $f(z)$ قطب من الرتبة n **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $0<|z-z_0|<r$ من الشكل :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \; ; b_n\neq 0 , \;\; 0<|z-z_0|<r$$

أي أنَّ الجزء الرئيسي يحوي على عدد منته من الحدود ، وأعلى أس للحد $(z-z_0)$ في المقام هي رتبة القطب أي z_0 هي قطب من الرتبة n في هذه الحالة .

ثالثاً : تكون النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة $f(z)$ نقطة شاذة أساسية **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $0<|z-z_0|<r$ من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad ; \quad 0<|z-z_0|<r$$

أي أنَّ الجزء الرئيسي يحوي على عدد غير منته من الحدود .

ملاحظة هامة :

عندما نوجد منشور لورانت للدالة $f(z)$ بجوار النقطة الشاذة المعزولة z_0 في النطاق $0<|z-z_0|<r$ حيث أن r هي المسافة بين مركز النشر الذي هو z_0 وبين أقرب نقطة شاذة منه ولنفرض أنَّ هذا النشر يملك الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots\cdots\quad ;\quad 0<|z-z_0|<r$$

عندئذٍ نعرِّف راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 بأنَّه قيمة الحد b_1 ونرمز لذلك بالرمز $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=b_1$ ، وفي حال غياب الحد b_1 عندئذٍ تكون قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 تساوي الصفر.

ملاحظات هامة :

- إذا كانت النقطة z_0 هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ عندئذٍ فإنَّ راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 يساوي الصفر أي: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$.
- إذا كانت النقطة z_0 هي قطب للدالة $f(z)$ من الرتبة m عندئذٍ يعطى الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 بالعلاقة:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

- من أجل $m=1$ أي أن z_0 هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ عندئذٍ تكون قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 هي:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$$

- إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة كسرية أي تملك الشكل : $f(z)=\dfrac{P(z)}{q(z)}$ وكانت النقطة z_0 قطب بسيط للدالة $f(z)$ عندئذٍ تكون قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 هي:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_0}\quad ;\ P(z_0)\neq 0$$

أمثلة :

أولاً : أوجد منشور لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ في جوار النقطة $z=0$ واعتماداً على النشر السابق اذكر نوع النقطة $z=0$ وعين قيمة الراسب لهذه الدالة عند $z=0$.

الحل:

إنَّ النقطة الشاذة الوحيدة للدالة $f(z)$ هي النقطة $z=0$ وعند النشر في جوارها لا تبقى هناك أي نقطة شاذة محدودة عندئذٍ يملك نطاق النشر الشكل : $0<|z|<\infty$ ومن أجل ذلك لدينا :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots\cdots \quad ; \quad 0 < |z| < \infty$$

يتضح من منشور لورانت للدالة $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ بجوار النقطة $z = 0$ في النطاق $0 < |z| < \infty$ أن الجزء الرئيسي معدوم بالكامل وبالتالي فإن النقطة $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح ، وبالتالي فإن قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z = 0$ تساوي الصفر أي : $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = 0$.

ثانياً: أوجد منشور لورانت للدالة $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^4}$ في جوار النقطة $z = 0$ واعتماداً على النشر السابق اذكر نوع النقطة $z = 0$ وعين قيمة الراسب لهذه الدالة عند $z = 0$.

الحل:

إنَّ النقطة الشاذة الوحيدة للدالة $f(z)$ هي النقطة $z = 0$ وعند النشر في جوارها لا تبقى هناك أي نقطة شاذة محدودة عندئذٍ يملك نطاق النشر الشكل : $0 < |z| < \infty$ ومن أجل ذلك لدينا :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

وباستبدال كل z بـ $2z$ في العلاقة الأخيرة نجد :

$$e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n = 1 + 2z + \frac{2^2}{2!} z^2 + \frac{2^3}{3!} z^3 + \cdots\cdots + \frac{2^n}{n!} z^n + \cdots$$

$$e^{2z} - 1 = 2z + \frac{2^2}{2!} z^2 + \frac{2^3}{3!} z^3 + \cdots\cdots + \frac{2^n}{n!} z^n + \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{e^{2z} - 1}{z^4} = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{z} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} z + \cdots\cdots + \frac{2^n}{n!} z^{n-4} + \cdots \Rightarrow$$

من النشر نجد أنَّ الجزء الرئيسي منته مما يعني أنَّ النقطة $z = 0$ هي قطب للدالة $f(z)$ وبما أنَّ أعلى أس للحد z في الجزء الرئيسي (ذو القوى السالبة) في المقام هو 3 فإن النقطة $z = 0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ وكما أنَّ الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z = 0$ هو : $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{4}{3}$.

تحديد نوع نقطة اللانهاية :

إذا كانت النقطة $z=\infty$ نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ عندئذٍ لتحديد نوع $z=\infty$ نستبدل في الدالة $f(z)$ كل z بـ $\frac{1}{t}$ ، ثم ندرس وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $f\left(\frac{1}{t}\right)$ ، وبحسب نوع النقطة $t=0$ للدالة $f\left(\frac{1}{t}\right)$ يكون نوع النقطة $z=\infty$ للدالة $f(z)$.

ملاحظة هامة جداً :

نستطيع تحديد نوع النقطة $z=\infty$ للدالة $f(z)$ من خلال النشر عند النقطة الاختيارية z_0 ولكن في خارجية النطاق الذي مركزه z_0 ونصف قطره r والذي قيمته تساوي المسافة بين مركز النشر وأبعد نقطة شاذة عن مركز النشر أي في النطاق: $|z-z_0|>r$ ، ومن خلال النشر نستطيع تحديد نوع نقطة اللانهاية ونميز الحالات التالية:

أولاً : تكون النقطة الشاذة المعزولة $z=\infty$ للدالة $f(z)$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $|z-z_0|>r$ من الشكل :

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\quad ;\quad |z-z_0|>r$$

أي أنَّ الجزء التحليلي (الجزء ذو القوى الموجبة للحد $(z-z_0)$) معدوم بالكامل .

ثانياً : تكون النقطة الشاذة المعزولة $z=\infty$ للدالة $f(z)$ قطب من الرتبة n **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $|z-z_0|>r$ من الشكل:

$$f(z)=a_n(z-z_0)^n+\cdots\cdots+a_1(z-z_0)+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\ ;\ a_n\neq 0\ ,\ |z-z_0|>r$$

أي أنَّ الجزء التحليلي يحوي على عدد منته من الحدود، وأعلى أس للحد $(z-z_0)$ فيه هي رتبة القطب $z=\infty$ أي أنَّ $z=\infty$ هي قطب من الرتبة n في هذه الحالة .

ثالثاً : تكون النقطة الشاذة المعزولة $z=\infty$ للدالة $f(z)$ نقطة شاذة أساسية **إذا وفقط إذا** كان نشر لورانت للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 وفي النطاق $|z-z_0|>r$ من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\quad ;\quad |z-z_0|>r$$

أي أنَّ الجزء التحليلي يحوي على عدد غير منته من الحدود.

ملاحظة هامة :

عندما نوجد منشور لورانت للدالة $f(z)$ بجوار النقطة الشاذة المعزولة $z=\infty$ في النطاق $|z-z_0|>r$ حيث أنَّ r هي المسافة بين مركز النشر الذي هو z_0 وبين أبعد نقطة شاذة عنه ، ولنفرض أنَّ هذا النشر يملك الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots\cdots\quad;\quad |z-z_0|>r$$

عندئذٍ نعرِّف راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z=\infty$ بأنه قيمة الحد b_1 وبإشارة مخالفة ونرمز لذلك بالرمز $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-b_1$ وفي حال غياب الحد b_1 عندئذٍ تكون قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z=\infty$ تساوي الصفر.

ملاحظة هامة ❶ :

مجموع الرواسب عند النقاط الشاذة والمحدودة لدالة $f(z)$ بالإضافة للراسب عند اللانهاية يساوي الصفر أي:

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z_i)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$$

ملاحظة هامة ❷:

❋ تكون النقطة $z=\infty$ نقطة شاذة غير معزولة لدالة $f(z)$ عندما تكون نهاية لمتتالية نقاط شاذة لهذه الدالة ولنورد المثال التالي:

لنأخذ الدالة $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ عندئذ إن النقاط الشاذة لهذه الدالة هي جذور المعادلة :

$$\sin z=0\ \Rightarrow z=n\pi\quad;\ n=0,\pm1,\pm2,....$$

من الواضح أن النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ تشكل متتالية هي $z=n\pi\quad;\ n=0,\pm1,\pm2,....$ ونلاحظ أنه عندما تنتهي n إلى اللانهاية نحصل على النهاية $z=\infty$ أي أن : $\lim_{n\to\infty} n\pi=\infty$ مما يعني أن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة غير معزولة لا يمكن تصنيفها .

ملاحظة هامة ❸:

إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة كسرية تملك الشكل : $f(z)=\dfrac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots\cdots+b_1z+b_0}$ عندئذٍ نوجد النهاية $\lim_{z\to\infty} f(z)$ فإذا كانت النهاية محدودة وهذا يحدث عندما تكون $n\le m$ فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح ، وإذا كانت النهاية غير محدودة وهذا يحدث عندما تكون $n>m$ فإن النقطة $z=\infty$ هي قطب للدالة $f(z)$ من الرتبة $n-m$.

ملاحظة ❹ : نستطيع إيجاد منشور لورانت لدالة $f(z)$ في جوار نقطة z_0 في أي نطاق لا يحوي على نقاط شاذة للدالة $f(z)$.

ملاحظة هامة جداً ❺ :

نستطيع تحديد نوع النقطة الشاذة المحدودة z_0 والنقطة $z=\infty$ للدالة $f(z)$ من نفس النشر إذا كانت z_0 هي النقطة الشاذة المحدودة الوحيدة ونشرنا بجوارها أي في النطاق $0<|z-z_0|<\infty$.

أمثلة على ما سبق :

❶ ما رتبة القطب للدالة: $f(z)=\frac{3}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}$ عند $z=0$ مع التعليل، وما هو نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة وما قيمة الراسب عندها؟

الحل:

من الواضح أنَّ النقطة الشاذة المحدودة الوحيدة هي $z=0$ ونشر لورانت للدالة $f(z)$ بجوار النقطة $z=0$ في النطاق $0<|z|<\infty$ هو نفسها ، وبالتالي بما أن الجزء الرئيسي يحوي على عدد منته من الحدود فإن النقطة $z=0$ هي قطب ، وبما أنَّ أعلى أس للقوى السالبة هو 3 فإن $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$.

من نفس النشر نستطيع تحديد نوع النقطة $z=\infty$ ، بما أنَّ الجزء التحليلي معدوم بالكامل فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ وهي صفر من الدرجة الأولى ويمكن إصلاح الدالة عندها بأن نضع $f(\infty)=0$ وكما أنَّ راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z=\infty$ هو:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-b_1=-3$$

❷ عيِّن نوع النقطة $z=0$ للدالة: $f(z)=\frac{1}{2z\cos z-2z+z^3}$.

الحل:

إنَّ النقطة $z=0$ هي صفر للدالة: $h(z)=2z\cos z-2z+z^3$ وذلك لأنَّ: $h(0)=0$ ، ولنوجد درجة الصفر $z=0$ بالنسبة للدالة $h(z)$ وذلك بالشكل:

$$h'(z)=2\cos z-2z\sin z-2+3z^2 \Rightarrow h'(0)=2-0-2+0=0$$

$$h''(z)=-2\sin z-2\sin z-2z\cos z+6z=-4\sin z-2z\cos z+6z \Rightarrow h''(0)=0$$

$$h'''(z)=-4\cos z-2\cos z+2z\sin z+6=-6\cos z+2z\sin z+6 \Rightarrow h'''(0)=-6+0+6=0$$

$$h^{(4)}(z)=6\sin z+2\sin z+2z\cos z=8\sin z+2z\cos z \Rightarrow h^{(4)}(0)=0$$

$$h^{(5)}(z)=8\cos z+2\cos z-2z\sin z=10\cos z-2z\sin z \Rightarrow h^{(5)}(0)=10-0=10\neq 0$$

وبالتالي فالنقطة $z=0$ هي صفر من الدرجة الخامسة للدالة $h(z)$ وبالتالي فهي قطب من الرتبة الخامسة للدالة $f(z)=\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{2z\cos z-2z+z^3}$.

❸ أوجد سلسلة لورانت للدالة $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-2z}$ في المنطقة $|z|>2$ ، ثم عين نوع النقطة الشاذة $z=\infty$ لهذه الدالة .

الحل:

إنَّ النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة :

$$z^2-2z=0 \Rightarrow z(z-2)=0 \Rightarrow z=0 \wedge z=2$$

وبالتالي فإننا ننشر الدالة $f(z)$ في المنطقة $|z|>2$ أي في خارجية النطاق الذي مركزه النقطة الشاذة $z=0$ ونصف قطره $r=2$ وهي المسافة بين مركز النشر $z=0$ وأبعد نقطة شاذة عنه وهي $z=2$ أي أننا ننشر في جوار النقطة $z=\infty$ ونستطيع تحديد نوع اللانهاية من النشر الناتج:

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-2z}=\frac{2z-1}{z(z-2)}=\left(\frac{2z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{(z-2)}\right) \quad ; \quad |z|>2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1 \Rightarrow$$

$$f(z)=\left(\frac{2z-1}{z}\right)\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\left(\frac{2z}{z^2}-\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)} \quad ; \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

وبما أنَّ:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{z^n}+\cdots\cdots \quad ; \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

بالتعويض نجد أنَّ:

$$f(z)=\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}\right)\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{z^n}+\cdots\cdots\right)=$$

$$=\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{z^n}+\cdots\cdots-\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}-\frac{2^2}{z^4}-\cdots\cdots-\frac{2^n}{z^{n+2}}-\cdots\cdots=$$

$$=\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{6}{z^3}+\frac{12}{z^4}+\cdots\cdots \quad ; \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

وبالتالي يكون النشر المطلوب:

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{6}{z^3}+\frac{12}{z^4}+\cdots\cdots \quad ; \quad |z|>2$$

يتضح من النشر أنَّ الجزء التحليلي معدوم بالكامل وبالتالي فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ وبإصلاح الدالة عندها بوضع $f(\infty)=0$ تصبح صفر من الدرجة الأولى.



❹ أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$ في النطاق $1<|z|<2$ ، ثم أوجد قيمة الراسب لهذه الدالة عند النقطة $z=0$ ، وما هو نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة، وما هي قيمة الراسب عند اللانهاية .

الحل:

بملاحظة أنَّ البسط هو مشتق المقام في الدالة $f(z)=\dfrac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$ فإنَّ :

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)\right]=\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$$

وبما أنَّ: $\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)=\ln\left[z(z-1)(z-2)\right]=\ln z+\ln(z-1)+\ln(z-2)$

وبالاشتقاق نجد أنَّ:

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)\right]=\frac{d}{dz}\left[\ln z+\ln(z-1)+\ln(z-2)\right]\Rightarrow$$

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z}$ ضمن النطاق $1<|z|<2$ هو نفسها .

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z-1}$ ضمن النطاق $1<|z|<2$ هو نفسه ضمن النطاق $|z|>1$ والذي يكتب بالشكل $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ ويكون:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots\quad ;\quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z-2}$ ضمن النطاق $1<|z|<2$ هو نفسه نشرها ضمن النطاق $|z|<2$ والذي يكتب بالشكل $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ ويكون :

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}-\cdots\cdots\quad ;\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

ومنه ضمن النطاق $1<|z|<2$ يكون :

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}-\cdots\cdots\Rightarrow$$

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}-\cdots\cdots \quad ; 1<|z|<2$$

ومن الواضح أننا لا نستطيع من خلال النشر تحديد نوع النقطة الشاذة $z=0$ لأنَّ النشر يجب أن يكون فقط ضمن النطاق $1<|z|$ ، وبما أنَّ الدالة المعطاة تكتب بالشكل :

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)(z-2)}$$

فإنه من الواضح أنَّ النقطة الشاذة $z=0$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط إذاً $z=0$ هي قطب بسيط وبالتالي، فإنَّ راسب الدالة $f(z)$ عند النقطة $z=0$ هو:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0} z\,\frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to 0}\frac{3z^2-6z+2}{(z-1)(z-2)}=1$$

كما اننا لا نستطيع تحديد نوع النقطة $z=\infty$ من خلال النشر وذلك لأنَّ نطاق النشر يجب أن يكون فقط $|z|>2$ وبالتالي باستبدال كل z بـ $\frac{1}{t}$ ونحدد نوع النقطة $t=0$ في الدالة $f(t)$ فيكون للنقطة $z=\infty$ نفس النوع في الدالة $f(z)$ ومنه فإن:

$$f(t)=\frac{\frac{3}{t^2}-\frac{6}{t}+2}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-2\right)}=\frac{2t^3-6t^2+3t}{(1-t)(2-t)}=\frac{2t^3-6t^2+3t}{(t-1)(t-2)}$$

ومن الواضح أنَّ النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للدالة $f(t)$ ، وبالتالي $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ ، وهي بالتحديد صفر من الدرجة الأولى .

كما نستطيع تحديد نوع النقطة $z=\infty$ بطريقة أخرى هي:

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2}{z^3}=\lim_{z\to\infty}\frac{3}{z}=\frac{3}{\infty}=0\neq\infty$$

وهذا يعني أنَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وهي بالتحديد صفر من الدرجة الأولى كون درجة المقام أكبر من درجة البسط بواحد، ولإيجاد قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z=\infty$ نستفيد من العلاقة:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

حيث أنَّ النقاط الشاذة $z=2\ ,\ z=1\ , z=0$ هي أقطاب بسيطة كونها أصفاراً للمقام وليست أصفاراً للبسط وقد وجدنا أنَّ $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1$ ، ولنوجد البقية :

$$\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to1}\frac{3z^2-6z+2}{z(z-2)}=1$$

$$\underset{z=2}{\text{Res}}\, f(z)=\lim_{z\to2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to2}(z-2)\frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)(z-2)}=\lim_{z\to2}\frac{3z^2-6z+2}{z(z-1)}=1$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$1+1+1+\underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z)=0 \quad\Rightarrow \underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z)=-3$$

❺ بين نوع النقطة الشاذة $z=0$ للدالة $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^4}$ ، ومن ثم أيِّد إجابتك بطريقة النشر، وبين نوع النقطة $z=\infty$ إذا كان من الممكن من خلال هذا النشر .

الحل:

من الواضح أنَّ النقطة $z=0$ هي صفر للبسط من الدرجة الأولى، وصفر للمقام من الدرجة الرابعة وبالتالي فإنَّ النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة وكما يمكن أن نقول:

$$\lim_{z\to0} f(z)=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z^4}=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{4z^3}=\infty$$

إذاً $z=0$ هي قطب وبما أنَّ:

$$\lim_{z\to0} z^3 f(z)=\lim_{z\to0} z^3\left(\frac{e^z-1}{z^4}\right)=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{1}=1$$

ومنه نستنتج أن النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة .

لمعرفة نوع النقطة $z=0$ ننشر داخل نطاق مركزه النقطة $z=0$ ونصف قطره البعد بين مركز النشر $z=0$ وأقرب نقطة شاذة له ولكن الدالة لا تملك أي نقطة شاذه محدودة غير $z=0$ أي أنَّ النطاق هو : $0<|z-0|<\infty$ كون مركز النشر نقطة شاذه فيصبح النطاق موخوذ (محذوف المركز) ومنه:

ضمن النطاق $0<|z|<\infty$ لدينا :

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\cdots\cdots \quad\Rightarrow$$

$$e^z-1=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\cdots\cdots \quad\Rightarrow$$

$$\frac{e^z-1}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!}+\frac{z}{5!}+\cdots\cdots\cdots$$

ومن الواضح من خلال النشر أنَّ نوع النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة ، وقيمة الراسب عندها هي:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

كما أنَّ النقطة $z=\infty$ يمكن تحديد نوعها من خلال هذا النشر كون النقطة الشاذة الوحيدة هي مركز النشر ولا توجد نقطة شاذة أخرى وبما أنَّ الجزء التحليلي (ذو القوى الموجبة لـ z) غير منته فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة أساسية.

❻ أوجد سلسلة لوران للدالة $f(z)=\dfrac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$ في المنطقة $|z|>2$ ، ثم بين نوع النقطة الشاذة $z=\infty$ لهذه الدالة وبعدها أوجد راسب الدالة $f(z)$ عند هذه النقطة.

الحل:

بملاحظة أنَّ البسط هو مشتق المقام في الدالة $f(z)=\dfrac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$ فإنَّ:

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)\right]=\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}$$

وبما أنَّ: $\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)=\ln\left[z(z-1)(z-2)\right]=\ln z+\ln(z-1)+\ln(z-2)$

وبالاشتقاق نجد أنَّ:

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\left(z^3-3z^2+2z\right)\right]=\frac{d}{dz}\left[\ln z+\ln(z-1)+\ln(z-2)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z}$ ضمن النطاق $|z|>2$ هو نفسها .

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z-1}$ ضمن النطاق $|z|>2$ هو نفسه ضمن النطاق $|z|>1$ والذي يكتب بالشكل : $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$ ويكون:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots\cdots \quad ; \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

إنَّ نشر الدالة $\dfrac{1}{z-2}$ ضمن النطاق $|z|>2$ والذي يكتب بالشكل : $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ ويكون :

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right]=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\frac{2^3}{z^4}+\cdots\cdots \quad ; \quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

ومنه ضمن النطاق $|z|>2$ يكون:

$$\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\frac{2^3}{z^4}+\cdots\cdots\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{3}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{5}{z^3}+\frac{9}{z^4}+\cdots\cdots\cdots \quad ; \quad |z|>2$$

بما أننا ننشر الدالة $f(z)$ في خارجية النطاق الذي يحوي جميع النقاط الشاذة المحدودة إذاً نحن ننشر في جوار النقطة $z=\infty$ ، وبما أن الجزء التحليلي معدوم بالكامل فالنقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وبوضع $f(\infty)=0$ تكون النقطة $z=\infty$ صفر من الدرجة الأولى.

يتضح من خلال النشر أنَّ: $\underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z)=-b_1=-(3)=-3$.

❼ أوجد منشور لورانت للدالة $f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2}$ في النطاق $|z-1|>1$ ، ثم بين نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة، ثمَّ أوجد $\text{Res}\, f(z)$ عند $z=\infty$.

الحل :

بإجراء التحويل $z-1=t$ ننقل من نشر الدالة $f(z)$ في جوار النقطة $z=1$ في النطاق $|z-1|>1$ إلى نشر الدالة $f(t)$ في جوار النقطة $t=0$ في النطاق $|t|>1$ ولنوضح ذلك بالشكل:

بما ان $z-1=t$ فإن $z=t+1$ وبالتعويض في الدالة $f(z)$ نجد أن:

$$f(t)=\frac{(t+1)^2-2(t+1)+3}{(t+1)-2}=\frac{t^2+2t+1-2t-2+3}{t+1-2}=\frac{2+t^2}{t-1}=(2+t^2)\left(\frac{1}{t-1}\right)$$

ولننشر الدالة $f(t)$ في النطاق $|t|>1$:

إن النطاق $|t|>1$ يكتب بالشكل : $\left|\frac{1}{t}\right|<1$ وبالتالي نكتب الدالة $f(t)$ بالشكل:

$$f(t)=(2+t^2)\left(\frac{1}{t-1}\right)=(2+t^2)\left(\frac{1}{t\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right)=\left(\frac{2+t^2}{t}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{t}+t\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^n=\left(\frac{2}{t}+t\right)\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\cdots\cdots\right)+\left(t+1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=t+1+3\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\cdots\cdots\right)\Rightarrow f(t)=t+1+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^n}\quad;\ |t|>1$$

وبالعودة للمتحولات القديمة أي بتعويض $t=z-1$ في النشر الأخير نحصل على النشر المطلوب:

$$f(z)=(z-1)+1+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}\quad;\ |z-1|>1$$

وهو منشور الدالة $f(z)$ في جوار النقطة $z=1$ ، وفي خارجية الدائرة التي مركزها $z=1$ ونصف قطرها يساوي الواحد أي أننا نستطيع تحديد نوع نقطة اللانهاية من خلال هذا النشر ، وبما أن الجزء التحليلي يحتوي على عدد منته من الحدود عندئذٍ تكون النقطة $z=\infty$ قطب للدالة $f(z)$ ، وبما أن درجة أعلى أس للحد $(z-1)$ في الجزء التحليلي هي الواحد فإن النقطة $z=\infty$ هي قطب من الرتبة الأولى للدالة $f(z)$ ، وكما أنَّ راسب الدالة $f(z)$ عند $z=\infty$ هو $\underset{z=\infty}{\text{Res}}\, f(z)=-b_1=-3$.

❽ عين نوع النقطة $z=0$ للدالة $f(z)=e^{\left(\frac{\sin z}{z}\right)}$ ، وعين قيمة الراسب عندها .

الحل :

بما أنَّ $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ فإن: $\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}e^{\left(\frac{\sin z}{z}\right)}=e\neq\infty$ ، وبالتالي فإن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح

واعتماداً على المبرهنة : " إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون النقطة z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح هو أنَّ يكون للدالة $f(z)$ في جوار موخوذ عند هذه النقطة التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\qquad;\ 0<|z-z_0|<\delta$$

أي في حالة z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ يكون الجزء الرئيسي من نشر لورانت معدوم بالكامل أي أنَّ $b_1=0$ وبالتالي نستنتج أن : $\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z)=b_1=0$.

❾ لتكن لدينا الدالة $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+4}$ ما هو نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة وما هي قيمة الراسب عندها.

الحل :

بما أنَّ $\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{e^{iz}}{z^2+4}$ غير موجودة فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة أساسية، كما يمكن أن نقول:

بما أنَّ النقطة $z=\infty$ هي قطب بسيط للدالة iz فهي نقطة شاذة أساسية للدالة e^{iz} وبالتالي تبقى نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$.

ولإيجاد قيمة الراسب عند $z=\infty$ نعتمد على العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

أي أنَّ مجموع الرواسب عند النقاط الشاذة المحدودة بالإضافة للراسب عند اللانهاية يساوي الصفر، ومن أجل ذلك نوجد الرواسب عند النقاط الشاذة المحدودة:

إن النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$ هي جذور المعادلة :

$$z^2+4=0 \;\Rightarrow\; z^2=-4=4i^2 \;\Rightarrow\; z=2i \;\wedge\; z=-2i$$

وهي أقطاب بسيطة لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط وبالتالي فإن:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)f(z)\right]=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)}\right]=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{iz}}{(z+2i)}\right]=\frac{e^{-2}}{4i}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}\left[(z+2i)f(z)\right]=\lim_{z\to -2i}\left[(z+2i)\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right]=$$

$$=\lim_{z\to -2i}\left[(z+2i)\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)}\right]=\lim_{z\to -2i}\left[\frac{e^{iz}}{(z-2i)}\right]=-\frac{e^{2}}{4i}$$

وبالتالي يصبح لدينا اعتماداً على العلاقة $(*)$ أنَّ:

$$b_1+b_2+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{e^{-2}}{4i}-\frac{e^{2}}{4i}+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{e^{2}}{4i}-\frac{e^{-2}}{4i}=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\right)=-\frac{i}{2}\operatorname{sh}(2) \quad\Rightarrow\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{i}{2}\operatorname{sh}(2)$$

⑩ ما نوع النقطة $z=\dfrac{1}{2}$ للدالة $f(z)=\dfrac{2z^3-11z^2+17z-6}{(2z-1)^3}$ واحسب قيمة الراسب عندها.

الحل :

لنضع: $h(z)=2z^3-11z^2+17z-6$

بما أنَّ النقطة $z=\frac{1}{2}$ هي صفر من الدرجة الأولى للدالة $2z-1$ فهي صفر من الدرجة الثالثة للدالة $(2z-1)^3$ أي للمقام وكما أنَّ:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-11\left(\frac{1}{2}\right)^2+17\left(\frac{1}{2}\right)-6=\frac{1}{4}-\frac{11}{4}+\frac{34}{4}-6=0 \Rightarrow$$

$$h'(z)=6z^2-22z+17 \Rightarrow h'\left(\frac{1}{2}\right)=6\left(\frac{1}{2}\right)^2-22\left(\frac{1}{2}\right)+17=\frac{3}{2}-11+17=\frac{15}{2}\neq 0$$

وبالتالي فإن النقطة $z=\frac{1}{2}$ هي صفر للدالة $h(z)$ من الدرجة الأولى أي للبسط.

إذاً فالنقطة $z=\frac{1}{2}$ هي صفر للمقام من الدرجة الثالثة ، وصفر للبسط من الدرجة الأولى فهو قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$ ، ولإيجاد قيمة الراسب عند $z=\frac{1}{2}$ نعوض $m=2$ في القانون:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

فنجد أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 f(z)\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\frac{(2z-1)(z-2)(z-3)}{(2z-1)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[(2z-1)^2\frac{(2z-1)(z-2)(z-3)}{(2z-1)^3}\right]=\frac{1}{4}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[(z-2)(z-3)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[z^2-5z+6\right]=\frac{1}{4}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left[2z-5\right]=\frac{1}{4}(-4)=-1$$

❶❶ صنف نوع نقطة اللانهاية للدوال الآتية :

❶ $g_1(z)=\frac{z}{z^3+i}$, ❷ $g_2(z)=\frac{z^3+i}{z}$, ❸ $g_3(z)=\frac{z-1}{z+1}$

الحل :

❶ نستبدل في الدالة $g_1(z)$ كل z بـ $\frac{1}{t}$ فنحصل على الدالة $g_1(t)$ فيكون وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $g_1(t)$ نفسه وضع $z=\infty$ بالنسبة للدالة $g_1(z)$:

$$g_1(t)=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^3+i}=\frac{t^2}{1+i\,t^3}\quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0} g_1(t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1+i\,t^3}=\frac{0}{1}=0$$

إنَّ النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للدالة $g_1(t)$ وبالتالي فإنَّ $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $g_1(z)$ وبوضع $g_1(\infty)=0$ تصبح نقطة اللانهاية صفر من الدرجة الثانية.

❷ نستبدل في الدالة $g_2(z)$ كل z بـ $\frac{1}{t}$ فنحصل على الدالة $g_2(t)$ فيكون وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $g_2(t)$ نفسه وضع $z=\infty$ بالنسبة للدالة $g_2(z)$:

$$g_2(t)=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^3+i}{\left(\frac{1}{t}\right)}=\frac{1+i\,t^3}{t^2}\quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0} g_2(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1+i\,t^3}{t^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

إذاً النقطة $t=0$ هي قطب للدالة $g_2(z)$ ، وبما أن :

$$\lim_{t\to 0} t^2 g_2(t)=\lim_{t\to 0} t^2\left(\frac{1+i\,t^3}{t^2}\right)=\lim_{t\to 0}\left(1+i\,t^3\right)=1$$

فإن النقطة الشاذة $t=0$ هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $g_2(t)$ ، وبالتالي فإن $z=\infty$ هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $g_2(z)$.

❸ نستبدل في الدالة $g_3(z)$ كل z بـ $\frac{1}{t}$ فنحصل على الدالة $g_3(t)$ فيكون وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $g_3(t)$ نفسه وضع $z=\infty$ بالنسبة للدالة $g_3(z)$:

$$g_3(t)=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)-1}{\left(\frac{1}{t}\right)+1}=\frac{1-t}{1+t}\quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0} g_3(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1-t}{1+t}=\frac{1}{1}=1$$

أي أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للدالة $g_3(t)$ ، وبالتالي تكون النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وبوضع $g_3(\infty)=1$ تصبح النقطة $z=\infty$ نقطة عادية للدالة $g_3(z)$.

❷❶ أوجد سلسلة لوران للدالة $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ في المنطقة $0<|z-i|<2$ ثم عين نوع النقطة الشاذة $z=\infty$ لهذه الدالة.

الحل:

بإجراء التحويل $z-i=t$ ننتقل من نشر الدالة $f(z)$ في جوار النقطة $z=i$ في المنطقة $0<|z-i|<2$ إلى نشر الدالة $f(t)$ في جوار النقطة $t=0$ في المنطقة $0<|t|<2$

$$f(t)=\frac{1}{\left[(t+i)^2+1\right]^2}=\frac{1}{\left(t^2+2it-1+1\right)^2}=\frac{1}{\left(t^2+2it\right)^2}=\frac{1}{t^2}\frac{1}{(t+2i)^2}\ ;\ 0<|t|<2$$

ولنوجد منشور الدالة $\frac{1}{t+2i}$ في المنطقة $0<|t|<2$:

يمكن كتابة المنطقة $0<|t|<2$ بالشكل $0<\left|\frac{t}{2}\right|<1$ وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{t+2i}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{2i}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{t}{2i}\right)}\right)=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{2i}\right)^n=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(2i)^{n+1}}$$

علماً أن :

$$0<\left|-\frac{t}{2i}\right|=\left|\frac{t}{2}\right|<2$$

وباشتقاق الطرفين في النشر الأخير نجد أن :

$$\frac{-1}{(t+2i)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n t^{n-1}}{(2i)^{n+1}}\ \Rightarrow\ \frac{1}{(t+2i)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n t^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{t^2(t+2i)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n t^{n-3}}{(2i)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^{n+1}\frac{n t^{n-3}}{(2)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(i)^{n+1}\frac{n t^{n-3}}{(2)^{n+1}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(i)^{n+1}t^{n-3}}{(2)^{n+1}}\right]$$

ومنه فإن منشور الدالة $f(t)$ في المنطقة $0<|t|<2$ هو :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(i)^{n+1}t^{n-3}}{(2)^{n+1}}\right]=-\frac{1}{4t^2}-\frac{i}{8t}+\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{n(i)^{n+1}t^{n-3}}{(2)^{n+1}}\right]=-\frac{1}{4t^2}-\frac{i}{8t}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+3)(i)^{n+4}t^n}{(2)^{n+4}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4t^2}-\frac{i}{8t}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+3)(i)^n(i)^4t^n}{(2)^{n+4}}\right]=-\frac{1}{4t^2}-\frac{i}{8t}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+3)(i)^n t^n}{(2)^{n+4}}\right]\ ;\ 0<|t|<2$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أن منشور الدالة $f(z)$ بجوار النقطة $z=i$ في المنطقة $0<|z-i|<2$ هو :

$$f(z)=-\frac{1}{4(z-i)^2}-\frac{i}{8(z-i)}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+3)(i)^n(z-i)^n}{(2)^{n+4}}\right]\ ;\ 0<|z-i|<2$$

لا نستطيع تحديد نوع نقطة اللانهاية أي النقطة $z=\infty$ من خلال هذا النشر لأن النشر الذي يسمح بتحديد نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة هو : $|z-i|>2$ ، وبالتالي نستخدم طريقة أخرى لتحديد نوع اللانهاية بأن نبدل كل z بـ $\frac{1}{t}$ في الدالة $f(z)$ وندرس وضع النقطة $t=0$ بالنسبة للدالة $f(t)$ أي أنَّ:

$$f(t)=\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2+1\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^2}=\frac{t^4}{(1+t^2)^2}$$

وبما أنَّ:

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{(1+t^2)^2}=\frac{0}{1}=0$$

من الواضح أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للدالة $f(t)$ ، وبالتالي فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(z)$ وبوضع $f(\infty)=0$ تصبح النقطة $z=\infty$ هي صفر من الدرجة الرابعة للدالة $f(z)$.

❸❶ عين نوع نقطة اللانهاية للدالة $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z^2}}$ ، ثم احسب قيمة الراسب عندها.

الحل :

بما أن $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة للدالة $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z^2}}$ فإنه بالنشر في جوار النقطة الشاذة $z=0$ نستطيع تحديد نوع نقطة اللانهاية من خلال هذا النشر ، ونطاق النشر هو $0<|z|<\infty$ ، ومنه :

ضمن النطاق $0<|z|<\infty$ لدينا :

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

باستبدال كل z بـ $\frac{1}{z^2}$ في العلاقة الأخيرة :

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\cdots\cdots\ \Rightarrow$$

$$z\,e^{\frac{1}{z^2}}=z+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^5}+\cdots\cdots\quad ,\quad 0<|z|<\infty$$

يتضح من النشر أنَّ الجزء التحليلي يتكون من عدد منته من الحدود وبالتالي فإنَّ النقطة $z=\infty$ هي قطب ورتبة هذا القطب تساوي درجة أعلى أس في القوى الموجبة لـ z أي أنَّ النقطة $z=\infty$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ وقيمة الراسب عند اللانهاية هي : $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)=-b_1=-1$.

❶❹ أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-4)^3}$ في النطاق $0<|z-4|<4$ ، ثم أوجد قيمة الراسب لهذه الدالة عند النقطة $z=0$ ، وما هو نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة ، وما هي قيمة الراسب لهذه الدالة عند اللانهاية.

الحل:

لنجري التحويل $z-4=t$ فننتقل بذلك من نشر الدالة $f(z)$ بجوار $z=4$ في النطاق $0<|z-4|<4$ إلى نشر الدالة $f(t)$ بجوار $t=0$ في النطاق $0<|t|<4$ حيث أن :

بما أن $z-4=t$ ومنه فإن : $z=t+4$ نعوض ذلك في الدالة $f(z)$ فنحصل على الدالة $f(t)$ بالشكل:

$$f(t)=\frac{t+4+1}{(t+4)t^3}=\left(\frac{t+5}{t^3}\right)\left(\frac{1}{4+t}\right) \;;\; 0<|t|<4 \Rightarrow 0<\left|\frac{t}{4}\right|<1$$

$$\frac{1}{4+t}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{t}{4}\right)}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{-t}{4}\right)}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{4^{n+1}}\Rightarrow$$

$$f(t)=\left(\frac{t+5}{t^3}\right)\left(\frac{1}{4+t}\right)=\left(\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t^3}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{4^2}+\frac{t^2}{4^3}-\frac{t^3}{4^4}+\frac{t^4}{4^5}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{4^2t}+\frac{1}{4^3}-\frac{t}{4^4}+\frac{t^2}{4^5}-\cdots\cdots\right)+\left(\frac{5}{4t^3}-\frac{5}{4^2t^2}+\frac{5}{4^3t}-\frac{5}{4^4}+\frac{5t}{4^5}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{5}{4t^3}-\frac{1}{4^2t^2}+\frac{1}{4^3t}-\frac{1}{4^4}+\frac{t}{4^5}+\cdots\cdots \;;\; 0<|t|<4$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ منشور الدالة $f(z)$ بجوار النقطة $z=4$ هو :

$$f(z)=\frac{5}{4(z-4)^3}-\frac{1}{4^2(z-4)^2}+\frac{1}{4^3(z-4)}-\frac{1}{4^4}+\frac{(z-4)}{4^5}+\cdots\cdots \;;\; 0<|z-4|<4$$

نلاحظ أن منشور الدالة ليس بجوار $z=0$ فلا نستطيع تحديد نوع النقطة $z=0$ من خلال النشر لذلك لدينا الدالة:

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-4)^3}$$

ومن الواضح أن النقطة $z=0$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط إذا فالنقطة $z=0$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ وقيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z=0$ هي :

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0} z\left(\frac{z+1}{z(z-4)^3}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{(z-4)^3}=-\frac{1}{64}$$

وبما أننا لا نستطيع معرفة نوع النقطة $z=\infty$ من النشر السابق لأن النشر في جوار اللانهاية يجب أن يكون ضمن النطاق $|z-4|>4$ ، فمن أجل ذلك نستبدل كل z في الدالة $f(z)$ بـ $\frac{1}{t}$ فنجد أنَّ:

$$f(t)=\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-4\right)^3}=\frac{(1+t)t^3}{(1-4t)}$$

وبما أن النقطة $t=0$ هي نقطة عادية للدالة $f(t)$ كون هذه الدالة معرفة عند $t=0$ ، وهي صفر للدالة $f(t)$ من الدرجة الثالثة ، فإن النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح $f(z)$ ويمكن إصلاح الدالة عندها بوضع $f(\infty)=0$ وبالتالي تكون $z=\infty$ هي صفر من الدرجة الثالثة للدالة $f(z)$ وبالتالي نستنتج أن الراسب للدالة $f(z)$ عند اللانهاية يساوي الصفر ، وذلك اعتماداً على القاعدة : " إذا كانت اللانهاية صفراً للدالة $f(z)$ من الدرجة الثانية فما فوق عندئذٍ يكون راسب الدالة $f(z)$ عند اللانهاية يساوي الصفر " .

❶❺ (دورة الفصل الثاني للعام 2017):

1". أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z(z-3)}$ في النطاق $|z-3|>3$.

2". من النشر السابق حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها.

أولاً: أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z(z-3)}$ في النطاق $|z-3|>3$.

الحل:

لنجري التحويل $z-3=t$ لننتقل من نشر الدالة $f(z)$ بجوار النقطة $z=3$ ضمن النطاق $|z-3|>3$ إلى نشر الدالة $f(t)$ بجوار $t=0$ ضمن النطاق $|t|>3$ ، وكما أنَّ $z=t+3$ نعوض في الدالة $f(z)$ لنحصل على الدالة $f(t)$ أي:

$$f(t)=\frac{(t+3)^2-6(t+3)+10}{(t+3)t}=\frac{t^2+6t+9-6t-18+10}{t(t+3)}=\frac{t^2+1}{t(t+3)}\quad ;\ |t|>3$$

وبالتالي فإنَّ:

$$f(t)=\frac{t^2+1}{t(t+3)}\quad ;\ |t|>3$$

بما أنَّ $|t|>3$ فإنَّ $\left|\frac{t}{3}\right|>1$ ومنه فإنَّ $\left|\frac{3}{t}\right|<1$ وبالتالي يكون:

$$\frac{t^2+1}{t(t+3)}=(t^2+1)\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t+3}\right]=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left[\frac{1}{t\left(1+\frac{3}{t}\right)}\right]=\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{t}\right)}\right]=$$

$$=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{t}\right)^n=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3^n}{t^n}\right)=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left[1-\frac{3}{t}+\frac{3^2}{t^2}-\frac{3^3}{t^3}+\cdots\cdots\right];\ \left|\frac{3}{t}\right|<1$$

$$=\left(1-\frac{3}{t}+\frac{3^2}{t^2}-\frac{3^3}{t^3}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t^3}+\cdots\cdots\right)=1-\frac{3}{t}+\frac{10}{t^2}-\frac{30}{t^3}+\cdots\cdots\ ;\ |t|>3$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $t=z-3$ نجد أنَّ:

$$f(z)=\frac{z^2-6z+10}{z(z-3)}=1-\frac{3}{(z-3)}+\frac{10}{(z-3)^2}-\frac{30}{(z-3)^3}+\cdots\cdots\ ;\ |z-3|>3$$

ثانياً: من النشر السابق حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها.

الحل:

من الواضح أنَّ النطاق $|z-3|>3$ يملك الشكل $|z-z_0|>r$ حيث أنَّ $z_0=3$ أما $r=3$ فهي المسافة بين مركز النشر $z_0=3$ وأبعد نقطة شاذة عنه وهي $z=0$ وبالتالي فإننا نستطيع تحديد نوع النقطة $z=\infty$ من خلال هذا النشر، وبما أنَّ الجزء التحليلي (ذو القوى الموجبة) معدوم بالكامل فإنَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح ، ويمكن إصلاح الدالة عندها بوضع $f(\infty)=1$ ، وكما أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-b_1=-(-3)=3$$

❻❶ هل توجد دالة لها قطب بسيط عند النقطة z_0 بحيث أن $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$؟

وهل توجد دالة لها قطب من الرتبة الثانية عند z_0 بحيث أن $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$ ؟ علل إجابتك!

الحل:

أولاً: بفرض أن النقطة z_0 هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ عندئذٍ في جوار ما لهه النقطة يلزم ويكفي أن يكون لهذه الدالة التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}\quad ;\quad b_1\neq 0\ ,\quad 0<|z-z_0|<r$$

لنفرض جدلاً أنَّ $\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)=0$ أي أنَّ $b_1=0$ وبالتالي يصبح بحسب هذا الفرض أن للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ; \quad 0<|z-z_0|<r$$

وهذا يعني أن النقطة z_0 هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وذلك اعتماداً على المبرهنة القائلة : يلزم ويكفي أن تكون النقطة z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح هو أن يكون للدالة $f(z)$ في جوار موخوذ عند هذه النقطة التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ; \quad 0<|z-z_0|<r$$

وهذا يناقض الفرض الأصلي وهو أنَّ z_0 قطب بسيط ومرد هذا التناقض هو أنَّ الفرض الجدلي خاطئ أي أنه لا توجد دالة $f(z)$ تكون z_0 قطب بسيط وبحيث يكون $\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)=0$.

ثانياً : بفرض أنَّ النقطة z_0 هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$ عندئذٍ تملك هذه الدالة في جوار موخوذ عند هذه النقطة التمثيل التالي :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2} \; ; \quad b_2\neq 0 \;,\quad 0<|z-z_0|<r$$

لنفرض أن $\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)=0$ أي أن $b_1=0$ وبالتالي يصبح بحسب هذا الفرض أنَّ للدالة $f(z)$ التمثيل التالي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_2}{(z-z_0)^2} \quad ; \quad b_2\neq 0 \;,\quad 0<|z-z_0|<r$$

من التمثيل الأخير يتضح أنَّ النقطة z_0 هي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$ ، ومنه نستنتج أنه يوجد دالة تكون فيها z_0 قطب من الرتبة الثانية وبحيث يكون $\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)=0$.

❼❶ حدد فيما إذا كانت العبارات التالية صحيحة دوماً أم لا :

❶ إذا كان لكل من الدالتين $f\,,g$ قطب عند النقطة z_0 فإن $f+g$ لها قطب عند النقطة z_0 . ☒

❷ إذا كان للدالة f نقطة شاذة أساسية z_0 وكان للدالة g قطب عند z_0 فإن الدالة $f+g$ لها نقطة شاذة أساسية عند z_0 . ☑

❸ إذا كان للدالة f قطب من الرتبة m عند النقطة z_0، فإنَّ الدالة $f^2(z)$ لها قطب من الرتبة $2m$ عند النقطة z_0. ☑

❹ إذا كان للدالة f قطب عند z_0 وكان للدالة g نقطة شاذة أساسية z_0 فإن الدالة $f\cdot g$ لها قطب عند z_0 . ☒

❽❶ إذا كانت z_0 صفراً من الدرجة n للدالة $f(z)$ فعين نوع النقطة z_0 للدالة $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ مع التعليل.

الحل :

بما أنَّ النقطة z_0 هي صفر للدالة $f(z)$ من الدرجة n فهذا يعني أنَّ:

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z) \quad ; \quad g(z_0)\neq 0$$

وباشتقاق الطرفين نجد أنَّ:

$$f'(z)=n(z-z_0)^{n-1} g(z)+(z-z_0)^n g'(z) \quad ; \quad g(z_0)\neq 0$$

وبالتالي يتضح أن الدالة $F(z)$ تساوي:

$$F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-z_0)^{n-1} g(z)+(z-z_0)^n g'(z)}{(z-z_0)^n g(z)}=\frac{n}{(z-z_0)}+\frac{g'(z)}{g(z)} \quad ; \quad g(z_0)\neq 0$$

يتضح أنَّ النقطة z_0 هي قطب بسيط للدالة $F(z)$.

❶❾ إذا كانت z_0 قطب من المرتبة n للدالة $f(z)$ فعين نوع النقطة z_0 للدالة $F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ مع التعليل.

الحل:

بما أن النقطة z_0 هي قطب للدالة $f(z)$ من المرتبة n فهذا يعني أن

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n} g(z)$$

حيث أنَّ الدالة $g(z)$ تكون معرفة عند النقطة z_0 وأيضاً تكون $g(z_0)\neq 0$.

وباشتقاق الطرفين نجد أنَّ:

$$f'(z)=\frac{g'(z)}{(z-z_0)^n}-\frac{n}{(z-z_0)^{n+1}} g(z) \quad ; \quad g(z_0)\neq 0$$

وبالتالي يتضح أنَّ الدالة $F(z)$ تساوي:

$$F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\frac{g'(z)}{(z-z_0)^n}-\frac{n}{(z-z_0)^{n+1}} g(z)}{\frac{1}{(z-z_0)^n} g(z)}=\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{n}{(z-z_0)} \quad ; \quad g(z_0)\neq 0$$

يتضح أنَّ النقطة z_0 هي قطب بسيط للدالة $F(z)$.

❷⓿ أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{2z+1}{z^3+z^2}$ في النطاق $|z+1|>1$ ، ثمَّ حدد من خلال هذا النشر نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها.

الحل:

لنجري التحويل $z+1=t$ لننتقل من نشر الدالة $f(z)$ بجزار النقطة $z=-1$ إلى نشر الدالة $f(t)$ بجوار $t=0$ أي:

$$f(t)=\frac{2(t-1)+1}{(t-1)^3+(t-1)^2}=\frac{2t-2+1}{(t-1)^2\left[1+(t-1)\right]}=\frac{2t-1}{t(t-1)^2}$$

$$=\left(\frac{2t-1}{t}\right)\frac{1}{(t-1)^2}=\left(2-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{(t-1)^2} \quad ; \ |t|>1$$

نعلم أنَّ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{t-1}\right)=\frac{1}{(t-1)^2}$$

وبما أنَّ:

$$\frac{-1}{t-1}=-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right)=-\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n}=-\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}-\cdots\cdots \ ; \ |t|>1$$

فإنَّ:

$$\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{t-1}\right)=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{3}{t^4}+\cdots\cdots \ ; \ |t|>1$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$f(t)=\left(2-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{(t-1)^2}=\left(2-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{3}{t^4}+\frac{4}{t^5}+\cdots\cdots\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{3}{t^4}+\frac{4}{t^5}+\cdots\cdots\right)-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{3}{t^4}+\frac{4}{t^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{t^2}+\frac{4}{t^3}+\frac{6}{t^4}+\frac{8}{t^5}+\cdots\cdots-\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^4}-\frac{3}{t^5}-\frac{4}{t^6}-\cdots\cdots=\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^3}+\frac{4}{t^4}+\frac{5}{t^5}+\cdots\cdots \Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^3}+\frac{4}{t^4}+\frac{5}{t^5}+\cdots\cdots \ ; |t|>1$$

وبالعودة للمتحولات القديمة $t=z+1$ نجد أنَّ النشر المطلوب هو:

$$f(z)=\frac{2}{(z+1)^2}+\frac{3}{(z+1)^3}+\frac{4}{(z+1)^4}+\frac{5}{(z+1)^5}+\cdots\cdots \ ; |z+1|>1$$

بما أنَّ الجزء التحليلي (ذو القوى الموجبة) معدوم بالكامل فإنَّ النقطة $z=\infty$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح وهي بالتحديد صفر من الدرجة الثانية للدالة $f(z)$ ويمكن إصلاح الدالة عندها بوضع $f(\infty)=0$ ، كما أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-b_1=0$$

مبرهنة الرواسب

إذا كانت الدالة $f(z)$ تملك عدد منته من النقاط الشاذة يقع في داخلية كفاف C عندئذٍ فإن تكامل الدالة $f(z)$ على الكفاف C يساوي مجموع الرواسب للنقاط الشاذة التي تقع ضمن الكفاف مضروباً بـ $2\pi i$ أي أنَّ:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

حيث أنَّ النقاط الشاذة $z_j \; ; \; j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ تقع ضمن الكفاف C .

ملاحظة ❶: إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية على الكفاف C بمعنى إما أن تكون دالة شاملة أي تحليلية على كامل المستوي العقدي أو أن تكون لها نقاط شاذة واقعة في خارجية الكفاف C عندئذٍ نصبح أمام حالة تكامل لدالة تحليلية على كفاف مغلق وقيمة التكامل في هذه الحالة تساوي الصفر.

ملاحظة ❷: إذا كانت النقطة $z = \infty$ هي صفر من الدرجة الثانية فما فوق للدالة المستكملة $f(z)$ عندئذٍ فإن قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند $z = \infty$ تساوي الصفر، وإذا كانت النقاط الشاذة المحدودة للدالة $f(z)$ تقع جميعها ضمن الكفاف C مع كون $z = \infty$ هي صفر من الدرجة الثانية فما فوق للدالة المستكملة $f(z)$ عندئذٍ فإن قيمة التكامل تساوي الصفر.

ملاحظة ❸: (مجموع الرواسب للنقاط الشاذة المحدودة التي تقع ضمن الكفاف + مجموع الرواسب للنقاط الشاذة المحدودة التي تقع خارج الكفاف + الراسب عند نقطة اللانهاية) يساوي الصفر .

ملاحظة ❹: إذا كانت النقطة الشاذة z_0 هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ وتقع ضمن الكفاف C عندئذٍ نحن بحاجة لمعرفة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة z_0 والراسب لنقطة شاذة أساسية لا يحسب إلا عن طريق النشر.

أمثلة:

❶ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أثبت أنَّ: $\int_C \frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}\,dz = -\frac{\pi^2 i}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ علماً أنَّ C هو الدائرة $|z| = 1$.

الحل :

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة:

$$\cos(2z) = 0 \;\Rightarrow\; 2z = \frac{\pi}{2} + n\pi \;\Rightarrow\; z = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \;\; ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

نختار النقاط الشاذة التي تقع ضمن الكفاف:

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{4}$ وتقع ضمن الكفاف ، من أجل $n=1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$ وتقع خارج الكفاف، من أجل $n=-1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$ وتقع داخل الكفاف ومن أجل $n=-2$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$ وتقع خارج الكفاف، وبالتالي فإنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة والتي تقع ضمن الكفاف C والذي هو الدائرة $|z|=1$ هي النقطتين الشاذتين $z=-\frac{\pi}{4}\ ,\ z=\frac{\pi}{4}$ ، وهما أقطاب بسيطة لأنَّها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط وبالتالي اعتماداً على مبرهنة الرواسب فإنَّ:

$$\int_C \frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}dz=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}\right)=\left.\frac{z\,e^{\sin z}}{-2\sin(2z)}\right|_{z=\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}\right)=\left.\frac{z\,e^{\sin z}}{-2\sin(2z)}\right|_{z=-\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}$$

وبالتعويض نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_C \frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}dz=2\pi i\left(-\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}-\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\pi^2 i}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2}\right)=-\frac{\pi^2 i}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \Rightarrow\ \int_C \frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(2z)}dz=-\frac{\pi^2 i}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

❷ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_1=\int_{|z|=1}\frac{ze^{\sin z}}{\cos(3z)}dz\quad ,\quad I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{2z-1}{\left(z^4-1\right)^2(z-2)}dz$$

التكامل الأول:

الحل:

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة:

$$\cos(3z)=0 \;\Rightarrow 3z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\Rightarrow\; z=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3} \;\;;\; n=0,\pm1,\pm2,.....$$

نختار النقاط الشاذة التي تقع ضمن الكفاف:

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{6}$ وتقع ضمن الكفاف ، من أجل $n=1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ وتقع خارج الكفاف، من أجل $n=-1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$ وتقع ضمن الكفاف، ومن أجل $n=-2$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$ وتقع خارج الكفاف، وبالتالي فإنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة والتي تقع ضمن الكفاف C والذي هو الدائرة $|z|=1$ هي النقطتين الشاذتين $z=-\frac{\pi}{6}\;,\; z=\frac{\pi}{6}$ ، وهما أقطاب بسيطة لأنَّها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط وبالتالي اعتماداً على مبرهنة الرواسب فإنَّ:

$$\int_{|z|=1}\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(3z)}\,dz=2\pi i\,(b_1+b_2)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{6}}\left(\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(3z)}\right)=\left.\frac{z\,e^{\sin z}}{-3\sin(3z)}\right|_{z=\frac{\pi}{6}}=\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{-3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\left(\frac{\pi}{18}\right)e^{\frac{1}{2}}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(3z)}\right)=\left.\frac{z\,e^{\sin z}}{-3\sin(3z)}\right|_{z=-\frac{\pi}{6}}=\frac{\left(-\frac{\pi}{6}\right)e^{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{-3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-\left(\frac{\pi}{18}\right)e^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=1}\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(3z)}\,dz=2\pi i\left(-\left(\frac{\pi}{18}\right)e^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\pi}{18}\right)e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{\pi^2 i}{9}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)=-\frac{\pi^2 i}{9}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\int_{|z|=1}\frac{z\,e^{\sin z}}{\cos(3z)}\,dz=-\frac{\pi^2 i}{9}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

التكامل الثاني:

الحل:

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$\left(z^4-1\right)^2(z-2)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(z^4-1\right)^2=0 \;\Rightarrow z^4-1 \;\Rightarrow z^4=1 \Rightarrow\; z_k=(1)^{\frac{1}{4}} \;;\; k=1,2,3,4 \quad ;\; \left|z_k\right|=\sqrt[4]{|1|}=1<\frac{3}{2}$$

$$z-2=0 \;\Rightarrow z=2 \;\Rightarrow |2|=2>\frac{3}{2}$$

من الواضح أنَّ الجذور الأربعة $z_k \;;\; z=1,2,3,4$ تقع ضمن الدائرة $|z|=\frac{3}{2}$ ، أما النقطة $z=2$ فتقع في خارجية هذه الدائرة ومنه فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{2z-1}{\left(z^4-1\right)^2(z-2)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{4}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z)$$

ولنوجد الرواسب عند هذه الجذور الأربعة اعتماداً على القاعدة التالية:

$$\sum_{j=1}^{4}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z)+\underset{z=2}{\operatorname{Res}} f(z)+\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{4}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z)=-\left(\underset{z=2}{\operatorname{Res}} f(z)+\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z)\right)\;\cdots\cdots\cdots(*)$$

إنَّ النقطة الشاذة $z=2$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط وبالتالي فهي قطب بسيط ولنوجد الراسب عندها بالشكل:

$$\underset{z=2}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{2z-1}{\left(z^4-1\right)^2(z-2)}=\lim_{z\to 2}\frac{2z-1}{\left(z^4-1\right)^2}=\frac{3}{225}=\frac{1}{75}$$

وبما أنَّ النقطة $z=\infty$ هي قطب بسيط للبسط وقطب للمقام من الرتبة التاسعة وبالتالي فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة المستكملة وهي بالتحديد صفر من الدرجة الثامنة، وبالتالي اعتماداً على القاعدة: " إذا كانت النقطة $z=\infty$ صفر من الدرجة الثانية فما فوق للدالة $f(z)$ عندئذٍ يكون راسب الدالة $f(z)$ عند اللانهاية يساوي الصفر" ، نجد أنَّ $\underset{z=\infty}{\operatorname{Res}} f(z)=0$.

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\sum_{j=1}^{4}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}} f(z)=-\left(\frac{1}{75}+0\right)=-\frac{1}{75}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{2z-1}{\left(z^4-1\right)^2(z-2)}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{75}\right)=-\frac{2}{75}\pi i$$

❸ اعتماداً على مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكاملين:

$$❶\quad \int_{|z|=2}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}dz \qquad , \qquad ❷\quad \int_{|z|=2}\tan z\,dz$$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}$ هي جذور المعادلة :

$$z(z-1)(z-3)=0 \;\Rightarrow\; z=0 \;\wedge\; z=1 \;\wedge\; z=3$$

إنَّ النقاط الشاذة التي تقع ضمن الكفاف $|z|=2$ هي $z=1\;,\;z=0$ وهما أقطاب بسيطة للدالة المستكملة لأنَّها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط ، وبالتالي اعتماداً على مبرهنة الرواسب يكون لدينا:

$$\int_{|z|=2}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}dz=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to0}z\left(\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}\right)=\lim_{z\to0}\left(\frac{1-2z}{(z-1)(z-3)}\right)=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to1}(z-1)\left(\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}\right)=\lim_{z\to0}\left(\frac{1-2z}{z(z-3)}\right)=\frac{1-2}{1(1-3)}=\frac{1}{2}$$

ومنه نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=2}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=2\pi i\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{3}\pi i$$

❷ إنَّ التكامل المعطى يكتب على الشكل: $\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{\cos z}dz$ ، وبالتالي فإن النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة:

$$\cos z=0 \;\Rightarrow\; z=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad ; \quad n=0,\pm1,\pm2,.....$$

نختار النقاط الشاذة التي تقع ضمن الكفاف:

من أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{2}$ وتقع ضمن الكفاف، من أجل $n=1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$ وتقع خارج الكفاف، من أجل $n=-1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ وتقع داخل الكفاف، ومن أجل $n=-2$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$ وتقع خارج الكفاف وبالتالي فإن النقاط الشاذة للدالة المستكملة والتي تقع ضمن الكفاف C والذي هو الدائرة $|z|=2$ هي النقطتين الشاذتين $z=-\frac{\pi}{2}\ ,\ z=\frac{\pi}{2}$ ، وهما أقطاب بسيطة لأنها أصفار للمقام من الدرجة الأولى وليست أصفاراً للبسط وبالتالي اعتماداً على مبرهنة الرواسب فإن:

$$\int_{|z|=2} \tan z\, dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i\,(b_1+b_2)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)=\left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=-1 \quad , \quad b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)=\left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}}=-1$$

وبالتعويض نجد أنَّ قيمة التكامل هي :

$$\int_{|z|=2} \tan z\, dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i\,(-1-1)=-4\pi i$$

❸ اعتماداً على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية:

❶ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z\left(z^2+6iz-1\right)} dz$ ❷ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos(\pi z)} dz$ ❸ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$

الحل :

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\frac{z^2-1}{z\left(z^2+6iz-1\right)}$ هي جذور المعادلة: $z\left(z^2+6iz-1\right)=0$ ومنه إما $z=0$ أو أن يكون $z^2+6iz-1=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية ومنه فإنَّ:

$$\Delta=(6i)^2-4(1)(-1)=-32=32i^2 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}i$$

ومنه فإنَّ:

$$z_1=\frac{-6i+4\sqrt{2}i}{2}=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i \quad , \quad z_2=\frac{-6i-4\sqrt{2}i}{2}=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$$

بما أنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3-2\sqrt{2}<1 \quad , \quad |z_2|=\left|-\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3+2\sqrt{2}>1$$

مما يعني أنَّ النقطة الشاذة $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ تقع داخل الدائرة $|z|=1$ ، أما النقطة الشاذة $z=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$ تقع خارج الدائرة $|z|=1$ ، ومنه فإنَّ النقاط الشاذة التي تقع داخل الدائرة$|z|=1$ هي $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i \ , \ z=0$ وبالتالي بحسب مبرهنة الرواسب يكون:

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2-1}{z\left(z^2+6iz-1\right)}dz=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ: $$b_1=\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) \quad , \quad b_2=\underset{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}{\operatorname{Res}} f(z)$$

وبما أن النقطتان الشاذتان هما أقطاب بسيطة للدالة $f(z)$ فإن:

$$b_1=\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0} z\left(\frac{z^2-1}{z\left(z^2+6iz-1\right)}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2-1}{\left(z^2+6iz-1\right)}\right)=\frac{-1}{-1}=1$$

$$b_2=\underset{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}\left[z-\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right]f(z)$$

$$=\lim_{z\to\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}\left[z-\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right]\left(\frac{z^2-1}{z\left[z-\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right]\left[z+\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right]}\right)$$

$$=\lim_{z\to\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}\left(\frac{z^2-1}{z\left[z+\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right]}\right)=\frac{\left[\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right]^2-1}{\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\left[\left(-3+2\sqrt{2}\right)i+\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right]}=$$

$$=\frac{-\left(-3+2\sqrt{2}\right)^2-1}{\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\left[4\sqrt{2}i\right]}=\frac{-9-8+12\sqrt{2}-1}{12\sqrt{2}-16}=\frac{12\sqrt{2}-18}{12\sqrt{2}-16}=\frac{6\sqrt{2}-9}{6\sqrt{2}-8}$$

$$=\frac{\left(6\sqrt{2}-9\right)\left(6\sqrt{2}+8\right)}{\left(6\sqrt{2}-8\right)\left(6\sqrt{2}+8\right)}=\frac{72+48\sqrt{2}-54\sqrt{2}-72}{72-64}=\frac{-6\sqrt{2}}{8}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2-1}{z\left(z^2+6iz-1\right)}dz=2\pi i\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=2\pi i\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{4}\right)=\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)\pi i$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos(\pi z)}$ هي جذور المعادلة:

$$\cos(\pi z)=0 \;\Rightarrow\; \pi z=\frac{\pi}{2}+n\pi \;\Rightarrow\; z=\frac{1}{2}+n \quad ;\; n=0,\pm1,\pm2,.....$$

فمن أجل $n=0$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{1}{2}$ وتقع في داخلية الدائرة $|z|=1$ ، ومن أجل $n=1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=\frac{3}{2}$ وتقع خارج الدائرة $|z|=1$ ، ومن أجل $n=-1$ نحصل على النقطة الشاذة $z=-\frac{1}{2}$ وتقع في داخلية الدائرة $|z|=1$ ، ومن أجل $n=-2$ نحصل على النقطة الشاذة $z=-\frac{3}{2}$ وتقع خارج الدائرة $|z|=1$ ، ومنه نستنتج أن النقاط الشاذة التي تقع داخل الدائرة $|z|=1$ هي $z=-\frac{1}{2}\;,\; z=\frac{1}{2}$ وبالتالي بحسب مبرهنة الرواسب تكون قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\cos(\pi z)}\,dz=2\pi i\,(b_1+b_2)$$

حيث أن النقاط الشاذة $z=-\frac{1}{2}\;,\; z=\frac{1}{2}$ هي أقطاب بسيطة للدالة المستكملة لأنها أصفار من الدرجة الأولى للمقام وليست أصفاراً للبسط ، كما أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z)=-\left.\frac{e^z}{\pi\sin(\pi z)}\right|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\pi}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z)=-\left.\frac{e^z}{\pi\sin(\pi z)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\pi\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\pi}$$

ومنه فإن:

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\cos(\pi z)}\,dz=2\pi i\left(-\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\pi}+\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\right)=-4i\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)=-4i\,\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ هي جذور المعادلة:

$$z^4=0 \;\Rightarrow\; z=0$$

إنَّ النقطة الشاذة $z=0$ تقع داخل الدائرة $|z|=1$ ، وهي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ لأنَّها صفر للمقام من الدرجة الرابعة وصفر للبسط من الدرجة الأولى فهي قطب للدالة $f(z)$ من رتبة الفرق أي من الرتبة الثالثة وبحسب مبرهنة الرواسب يكون لدينا:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\,dz = 2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ: $b_1 = \underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \underset{z=0}{\operatorname{Res}}\left(\frac{\sin z}{z^4}\right)$ ، ولإيجاد قيمة الراسب نستخدم طريقة النشر لأنَّها الأسهل في هذه الحالة وذلك بأنَّ ننشر الدالة $f(z)=\left(\frac{\sin z}{z^4}\right)$ بجوار النقطة الشاذة $z=0$ في النطاق الذي مركزه النقطة الشاذة $z=0$ ونصف قطره يساوي المسافة بين مركز النشر وأقرب نقطة شاذة منه، وبما أن $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة المحدودة للدالة $f(z)$ فإننا ننشر هذه الدالة في النطاق : $0<|z|<\infty$:

نلاحظ أنَّه ضمن النطاق $0<|z|<\infty$ لدينا:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots\cdots$$

ومنه نجد أنَّ : $b_1 = -\frac{1}{3!}$ وبالتالي فإنَّ:

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

❹ اعتماداً على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية:

❶ $\displaystyle\int_{|z|=1} z\, e^{\frac{1}{z^2}}\,dz$ ❷ $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\,dz$ ❸ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos(2z)}{z^2(z+3)}\,dz$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z^2}}$ هي النقطة $z=0$ وتقع داخل الدائرة $|z|=1$، وكما أن النقطة $z=0$ هي قطب للدالة $\frac{1}{z^2}$ فهي شاذة أساسية للدالة $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z^2}}$ ، وبحسب مبرهنة الرواسب تكون قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=1} z\, e^{\frac{1}{z^2}}\,dz = 2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ $b_1 = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ ، وبما أن $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة المستكملة $f(z)$ ولا نستطيع حساب الراسب إلا عن طريق النشر:

بما أنَّ $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة للدالة $f(z)=z\,e^{\frac{1}{z^2}}$ فإنَّه بالنشر في جوار النقطة الشاذة $z=0$ في النطاق $0<|z|<\infty$ نستطيع إيجاد الراسب للدالة المستكملة عند النقطة $z=0$:

ضمن النطاق $0<|z|<\infty$ لدينا:

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

باستبدال كل z بـ $\frac{1}{z^2}$ في العلاقة الأخيرة:

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\cdots \Rightarrow$$

$$z\,e^{\frac{1}{z^2}} = 1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^5}+\cdots\cdots \quad , \quad 0<|z|<\infty$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = 1$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_{|z|=1} z\,e^{\frac{1}{z^2}}\,dz = 2\pi i\,(1) = 2\pi i$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ هي جذور المعادلة:

$$(z-3)(z^5-1)=0 \Rightarrow (z-3)=0 \;\wedge\; (z^5-1)=0 \Rightarrow$$
$$z=3 \;\wedge\; z=z_k \;;\; k=1,2,\ldots,5 \;;|z_k|=1$$

إن النقطة الشاذة $z=3$ تقع خارج الدائرة $|z|=2$ ، أما النقاط الشاذة $z=z_k \;;\; k=1,2,\ldots,5 \;;|z_k|=1$ فتقع داخل الكفاف وبحسب مبرهنة الرواسب تكون قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

واعتماداً على أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=3} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

وبما أنَّ النقطة $z=\infty$ هي صفر من الدرجة السادسة للدالة $f(z)$ فإن $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$ ، وبما أن النقطة الشاذة $z=3$ هي قطب بسيط للدالة $f(z)$ لأنها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط وبالتالي فإن:

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z^5-1)}=\frac{1}{3^5-1}=\frac{1}{242}$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\frac{1}{242}+0=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)=-\frac{1}{242}$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)=2\pi i\left(-\frac{1}{242}\right)=-\frac{\pi i}{121}$$

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{\cos(2z)}{z^2(z+3)}$ هي جذور المعادلة:

$$z^2(z+3)=0 \Rightarrow z=0 \ , \ z=-3$$

والنقاط الشاذة التي تقع داخل الدائرة $|z|=1$ هي النقطة $z=0$ وهي قطب من الرتبة الثانية للدالة $f(z)$ لأنَّها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط، وبحسب مبرهنة الرواسب فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos(2z)}{z^2(z+3)}dz=2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{\cos(2z)}{z^2(z+3)}\right]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{-2\sin(2z)(z+3)-\cos(2z)}{(z+3)^2}\right]=-\frac{1}{9}$$

ومنه فإنَّ:

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos(2z)}{z^2(z+3)}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{2\pi i}{9}$$

❺ اعتماداً على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية:

❶ $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}-1}{z^4}\,dz$ ❷ $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{\left(z^3+1\right)^2}\,dz$ ❸ $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}\,dz$

الحل :

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{e^{2z}-1}{z^4}$ هي النقطة $z=0$ وتقع داخل الدائرة $|z|=1$ ، وكما أنَّ النقطة $z=0$ هي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f(z)$ ، لأنَّها صفر للمقام من الدرجة الرابعة وصفر للبسط من الدرجة الأولى فهي قطب للدالة $f(z)$ من رتبة الفرق أي من الرتبة الثالثة ، وبحسب مبرهنة الرواسب تكون قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}-1}{z^4}\,dz = 2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ $b_1=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ ، وبنشر الدالة $f(z)$ بجوار النقطة الشاذة $z=0$ وفي النطاق $0<|z|<\infty$ نجد أنَّ:

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots$$

باستبدال كل z بـ $2z$ في العلاقة الأخيرة:

$$e^{2z}=1+\frac{2z}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^4}{4!}+\cdots\cdots=1+2z+2z^2+\frac{4z^3}{3}+\frac{2^4}{4!}z^4+\cdots \Rightarrow$$

$$e^{2z}-1=2z+2z^2+\frac{4z^3}{3}+\frac{2^4}{4!}z^4+\cdots\cdots \Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{e^{2z}-1}{z^4}=\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{3z}+\frac{2^4}{4!}z+\cdots\cdots \quad ; \quad 0<|z|<\infty$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=b_1=\frac{4}{3}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}-1}{z^4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi i}{3}$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^3+1\right)^2}$ هي جذور المعادلة:

$$\left(z^3+1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; \left(z^3+1\right)=0 \;\Rightarrow\; z^3=-1 \;\Rightarrow$$

$$z=(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{|-1|}\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)\right]\ ;\ k=0,1,2$$

$$k=0\ \Rightarrow\ z_0=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1\ \Rightarrow\ z_1=\left[\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)\right]=\left[\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right]=-1$$

$$k=2\ \Rightarrow\ z_2=\left[\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)\right]=\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ولكن في الحقيقة لسنا بحاجة لمعرفة هذه الجذور بل يكفي معرفة أن $|z_k|=1<2$ أي أنَّ النقاط الشاذة جميعها تقع داخل الدائرة $|z|=2$ وهذه النقاط الشاذة هي أصفار من الدرجة الثانية للمقام وليست أصفاراً للبسط إذاً فهي أقطاب من الرتبة الثانية للدالة المستكملة ، وبحسب مبرهنة الرواسب يكون لدينا:

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{(z^3+1)^2}\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)$$

واعتماداً على أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

وبما أنَّ النقطة $z=\infty$ هي صفر للدالة $f(z)$ من الدرجة السادسة فإن $\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=0$ ، فإنه بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)+0=0\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)=0$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{(z^3+1)^2}\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)=2\pi i(0)=0$$

❸ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$ هي النقطة الشاذة $z=0$ وهي نقطة شاذة أساسية بالإضافة إلى أنها تقع داخل الدائرة $|z|=1$، وبحسب مبرهنة الرواسب يكون لدينا:

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}\,dz=2\pi i\,b_1$$

حيث أنَّ: $b_1 = \underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z)$ ، وبما أنَّ $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فإنَّ الراسب عند هذه النقطة لا يحسب إلا عن طريق النشر، ومن أجل ذلك ننشر الدالة $f(z)$ في جوار النقطة الشاذة $z=0$ وفي النطاق $0<|z|<\infty$ علماً أنَّ النقطة الشاذة $z=0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة المحدودة، وضمن النطاق $0<|z|<\infty$ لدينا:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots$$

باستبدال كل z بـ $\frac{1}{z}$ في العلاقة الأخيرة:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$z\,e^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \cdots\cdots \Rightarrow$$

$$z\,e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}} = \left(z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \cdots\cdots\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \cdots\cdots\right) \Rightarrow$$

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}} = z + 1 + \frac{3}{2z} + \frac{7}{3!z^2} + \cdots\cdots \quad ; \quad 0<|z|<\infty$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) = b_1 = \frac{3}{2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i$$

❹ اعتماداً على نظرية الرواسب أثبت أنَّ:

❶ $$\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz = 4\pi i$$

❷ $$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{8}{3}\pi i e^{-2}$$

الحل :

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)(z-2)}$ هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$(z-1)(z-2)=0 \Rightarrow z=1 \ \& \ z=2$$

وهاتان النقطتان تقعان داخل الكفاف $|z|=3$ ، وهما أقطاب بسيطة لأنها أصفاراً للمقام وليست أصفاراً للبسط، وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)(z-2)}\, dz = 2\pi i\,(b_1+b_2)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\left[\frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)(z-2)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\left[\frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-2)}\right]=\frac{\sin \pi+\cos \pi}{(1-2)}=\frac{0-1}{-1}=1$$

وأيضاً:

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)\left[\frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)(z-2)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 2}\left[\frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)}\right]=\frac{\sin 2\pi+\cos 2\pi}{(2-1)}=\frac{0+1}{1}=1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^{2}+\cos \pi z^{2}}{(z-1)(z-2)}\, dz = 2\pi i\,(1+1)=4\pi i$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z+1)^{4}}$ هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$(z+1)^{4}=0 \Rightarrow (z+1)=0 \Rightarrow z=-1$$

وهذه النقطة تقع داخل الكفاف $|z|=2$ ، بما أن النقطة $z=-1$ هي صفر للدالة $(z+1)$ من الدرجة الأولى فهي صفر للدالة $(z+1)^{4}$ أي للمقام من الدرجة الرابعة وليست صفراً للبسط فهي قطب من الرتبة الرابعة للدالة المستكملة ومنه فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^{4}}\, dz = 2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}}\left[(z+1)^4 f(z)\right]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z+1)^4\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{z\to-1}\frac{d^3}{dz^3}\left[e^{2z}\right]=\frac{1}{6}\lim_{z\to-1}\left[8e^{2z}\right]=\frac{8}{6}e^{-2}=\frac{4}{3}e^{-2}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz=2\pi i\left(\frac{4}{3}e^{-2}\right)=\frac{8}{3}\pi i\,e^{-2}$$

❺ اعتماداً على نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

❶ $I_1=\int_{|z|=2}\frac{z-1}{z^3-4z^2+3z}dz$, ❷ $I_2=\int_{|z|=2}\frac{\text{ch}z}{e^{4z}-1}dz$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^3-4z^2+3z=0\Rightarrow z\left(z^2-4z+3\right)=0\Rightarrow z(z-1)(z-3)=0$$

وبالتالي فالجذور هي $z=0\ \&\ z=1\ \&\ z=3$ ، وبالتالي فالنقاط الشاذة للدالة المستكملة والواقعة داخل الكفاف هي $z=0\ \&\ z=1$ ، أما النقطة $z=3$ فتقع خارج الكفاف وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I_1=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)\right]$$

وبما أنَّ النقطة $z=0$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة $f(z)$ ومنه فإنَّ قيمة الراسب لهذه الدالة هي:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to0}z\frac{z-1}{z^3-4z^2+3z}=\lim_{z\to0}\frac{z-1}{z^2-4z+3}=\frac{0-1}{0-0+3}=-\frac{1}{3}$$

وبما أنَّ النقطة $z=1$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى للبسط فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح، وبالتالي فإنَّ قيمة الراسب للدالة $f(z)$ عند النقطة $z=1$ يساوي الصفر أي: $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=0$ ، وبالتالي تصبح قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_1=\int_{|z|=2}\frac{z-1}{z^3-4z^2+3z}dz=2\pi i\left[-\frac{1}{3}+0\right]=-\frac{2}{3}\pi i$$

❷ $I_2=\int_{|z|=2}\frac{\text{ch}z}{e^{4z}-1}dz$:

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$e^{4z}-1=0 \Rightarrow e^{4z}=1 \Rightarrow 4z=\log(1)=\log|1|+i\,(0+2n\pi)=4z=0+2n\pi i \Rightarrow$$

$$4z=2n\pi i \Rightarrow z=n\frac{\pi}{2}i \;;\; n=0,\mp1,\mp2,\ldots$$

نختار من النقاط الشاذة النقاط التي تقع داخل الكفاف $|z|=2$ أي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=2$، ومن الواضح أنَّه:

من أجل $n=0$ نجد أنَّ $z=0$ تقع داخل الكفاف، ومن أجل $n=1$ فإنَّ $z=\frac{\pi}{2}i$ تقع أيضاً في داخلية الكفاف، ومن أجل $n=-1$ فإنَّ $z=-\frac{\pi}{2}i$ تقع أيضاً في داخلية الكفاف، ومن أجل $n=2$ نجد أنَّ $z=\pi i$ تقع خارج الكفاف، ومن أجل $n=-2$ نجد أنَّ $z=-\pi i$ تقع خارج الكفاف أيضاً، وبالتالي اعتماداً على مبرهنة الرواسب فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_2=\int_{|z|=2}\frac{\text{chz}}{e^{4z}-1}dz=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z)\right] \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبما أنَّ النقطة $z=-\frac{\pi}{2}i$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة المستكملة $f(z)$ وبالتالي فإنَّ قيمة الراسب عندها تساوي الصفر أي $\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}i} f(z)=0$.

وبما أنَّ النقطة $z=0$ هي صفر من الدرجة الأولى للمقام وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيطة للدالة المستكملة $f(z)$ وبالتالي فإنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{\text{ch}\,z}{4e^{4z}}\right|_{z=0}=\frac{1}{4}$$

وبما أنَّ النقطة $z=\frac{\pi}{2}i$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وصفر للبسط من الدرجة الأولى فهي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة المستكملة $f(z)$ وبالتالي فإنَّ قيمة الراسب عندها تساوي الصفر أي $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z)=0$، وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$I_2=\int_{|z|=2}\frac{\text{chz}}{e^{4z}-1}dz=2\pi i\left[0+\frac{1}{4}+0\right]=\frac{\pi}{2}i$$

❻ اعتماداً على نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$❶\; I_1=\int_{|z+1-i|=\frac{3}{2}}\frac{z^5}{(z^2-1)(z+i)^2}dz \quad , \quad ❷\; I_2=\int_{|z|=5}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz$$

الحل:

❶ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$\left(z^2-1\right)\left(z+i\right)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z^2-1=0 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=1 \ \& \ z=-1 \\ z+i=0 \Rightarrow z+i=0 \Rightarrow z=-i \end{cases}$$

وبما أنَّ $\left|(1)+1-i\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{5}>\dfrac{3}{2}$ فالنقطة $z=1$ تقع خارج الكفاف المعطى والذي هو الدائرة $\left|z+1-i\right|=\dfrac{3}{2}$ وكما أنَّ: $\left|(-1)+1-i\right|=\left|-i\right|=1<\dfrac{3}{2}$ فالنقطة $z=-1$ تقع داخل الكفاف المعطى، وأيضاً: $\left|(-i)+1-i\right|=\left|1-2i\right|=\sqrt{5}>\dfrac{3}{2}$ فالنقطة $z=-i$ تقع خارج الكفاف المعطى.

وكون النقطة $z=-1$ هي النقطة الشاذة الوحيدة الواقعة داخل الكفاف المعطى فإنَّ قيمة التكامل المعطى تساوي:

$$I_1=\int_{\left|z+1-i\right|=\frac{3}{2}} \frac{z^5}{\left(z^2-1\right)\left(z+i\right)^2}dz=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

وبما أنَّ النقطة $z=-1$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة المستكملة وقيمة الراسب عندها تحسب بالشكل:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^5}{\left(z^2-1\right)\left(z+i\right)^2}$$

$$=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^5}{(z-1)(z+1)(z+i)^2}=\lim_{z\to -1}\frac{z^5}{(z-1)(z+i)^2}=\frac{-1}{-2(-1+i)^2}=-\frac{1}{4i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_1=\int_{\left|z+1-i\right|=\frac{3}{2}} \frac{z^5}{\left(z^2-1\right)\left(z+i\right)^2}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

❷ إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)=0$$

ومنه إما:

$$\left(z^2+1\right)^2=0 \Rightarrow z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=-i \ \& \ z=+i$$

أو

$$z^2+2z+2=0$$

ومنه فإنَّ:

$$\Delta=(2)^2-4(1)(2)=-4=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$$

$$z_1=\frac{-(2)+2i}{2(1)}=-1+i \quad , \quad z_2=\frac{-(2)-2i}{2(1)}=-1-i$$

مما سبق نستنتج أنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي: $z=-1-i \quad , \quad z=-1+i \quad , \quad z=-i \quad , \quad z=i$ وجميع هذه النقاط الشاذة تقع ضمن الكفاف $|z|=5$ والذي هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=5$، عندئذٍ فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I_2=\int_{|z|=5}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz$$
$$=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z)\right]$$

ونعلم أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0 \quad \Rightarrow$$
$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبما أنَّ النقطة $z=\infty$ هي صفر من الدرجة الرابعة للدالة المستكملة فإنَّ قيمة الراسب للدالة المستكملة عند $z=\infty$ تساوي الصفر أي:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z)=0$$

وبالتالي نستنتج أنَّ:

$$I_2=\int_{|z|=5}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz$$
$$=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1-i} f(z)\right]=2\pi i(0)=0$$

ملاحظة هامة جداً:

لإيجاد قيمة التكامل $I=\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ نتبع الخطوات التالية:

❶ نوجد أصفار الدالة $f(z)$ ونختار منها الأصفار التي تقع داخل الكفاف C فقط ، ولتكن الأصفار للدالة $f(z)$ والواقعة داخل الكفاف C هي $a_j \; ; \; j=1,2,\ldots,n$ ولنرمز لدرجات هذه الأصفار بـ $\alpha_j \; ; \; j=1,2,3,\ldots,n$، ومن ثمَّ نوجد صور هذه الأصفار وفق الدالة $\varphi(z)$ أي $\varphi(a_j) \; ; \; j=1,2,3,\ldots,n$.

❷ نوجد أقطاب الدالة $f(z)$ ونختار منها الأقطاب التي تقع داخل الكفاف C فقط ، ولتكن الأقطاب للدالة $f(z)$ والواقعة داخل الكفاف C هي $b_k \; ; \; k=1,2,\ldots,m$ ولنرمز لرتب هذه الأقطاب بـ $\beta_k \; ; \; k=1,2,3,\ldots,m$، ومن ثمَّ نوجد صور هذه الأقطاب وفق الدالة $\varphi(z)$ أي $\varphi(b_k) \; ; \; k=1,2,3,\ldots,m$.

عندئذٍ تكون قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\varphi(a_j)-\sum_{k=1}^{m}\beta_k\,\varphi(b_k)\right]$$

حالة خاصة:

في الحالة التي يكون فيها $\varphi(z)=1$ يملك التكامل السابق الشكل:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\,(N-P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ التي تقع داخل الكفاف C، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف C

أمثلة:

❶ أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I=\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث:

$$C:|z|=4\ ,\ \varphi(z)=z^2+1\ ,\ f(z)=\frac{(z+2)^2}{z^3+64z}$$

الحل:

☝ إنَّ أصفار الدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة:

$$(z+2)^3=0\ \Rightarrow\ z+2=0\ \Rightarrow\ z=-2$$

أي أنَّ $z=-2$ هو صفر من الدرجة الثالثة للدالة $f(z)$ ويقع ضمن الكفاف $|z|=4$ وصورته وفق الدالة $\varphi(z)$ هي:

$$\varphi(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$$

✌ إنَّ أقطاب الدالة $f(z)$ هي جذور معادلة المقام:

$$z^3+64z=0\Rightarrow\ z(z^2+64)=0\ \Rightarrow\ z(z-8i)(z+8i)=0$$

ومنه فإنَّ:

$z=0$ قطب بسيط ويقع ضمن الكفاف $|z|=4$ وصورته وفق الدالة $\varphi(z)$ هي: $\varphi(0)=(0)^2+1=1$

$z=-8i\ ,\ z=8i$ فهي أقطاب بسيطة ولكنها تقع خارج الكفاف $|z|=4$ وذلك لأنَّ $|8i|=|-8i|=8>4$

وبالتالي نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left[3(5)-1(1)\right]=2\pi i\,(14)=28\pi i$$

❷ أوجد قيمة التكامل:

$$I=\int_{|z|=5} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث: $f(z)=z^3+2z^2+5z-26$.

الحل:

بما أنَّ الدالة $f(z)$ هي عبارة عن كثيرة حدود بالتالي يوجد لها أصفار ولا يوجد لها أقطاب، وأصفار هذه الدالة هي جذور المعادلة:

$$z^3+2z^2+5z-26=0$$

نلاحظ أنَّ العدد $z=2$ هو من قواسم الحد الثابت (-26) ويحقق المعادلة الأخيرة:

$$(2)^3+2(2)^2+5(2)-26=8+8+10-26=0$$

بالتالي فهو أحد الجذور للمعادلة الأخيرة ، ونحصل على باقي الجذور بالشكل:

$$\begin{array}{r|l} & z^2+4z+13 \\ z-2 & z^3+2z^2+5z-26 \\ - & z^3-2z^2 \\ \hline & 0+4z^2+5z-26 \\ - & 4z^2-8z \\ \hline & 0+13z-26 \\ - & 13z-26 \\ \hline & 0 \end{array}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z^3+2z^2+5z-26=(z-2)(z^2+4z+13)$$

ومنه فإنَّ الجذران المتبقيان هما جذور المعادلة: $z^2+4z+13=0$

$$\Delta=(4)^2-4(1)(13)=16-52=-36=36i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=6i$$

ومنه فإنَّ:

$$z_1=\frac{-(4)+6i}{2(1)}=-2+3i \quad , \quad z_2=\frac{-(4)-6i}{2(1)}=-2-3i$$

مما سبق نستنتج أنَّ أصفار الدالة $f(z)$ هي :

$$z=2 \ , \ z=-2+3i \ , \ z=-2-3i$$

من الواضح أنَّ:

$$|-2+3i|=|-2-3i|=\sqrt{13}<5$$

وبالتالي فإن جميع الأصفار للدالة $f(z)$ تقع ضمن الكفاف المعطى وجميعها أصفار من الدرجة الأولى وصورها على الترتيب وفق الدالة $\varphi(z)=z$ هي نفسها، وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left[1(2)+1(-2+3i)+1(-2-3i)\right]=2\pi i(-2)=-4\pi i$$

❸ احسب قيمة التكامل: $I = \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4+1}dz$.

الحل:

إنَّ التكامل المعطى يكتب بالشكل:

$$I = \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{4z^3}{z^4+1}dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \;\; ; \; f(z) = z^4+1$$

وكون الدالة $\varphi(z) = 1$، فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=2$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=2$، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود فهي دالة صحيحة تملك أصفار ولكنها لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، وبما أنَّ للدالة $f(z)=z^4+1$ أربعة أصفار تقع على محيط دائرة الوحدة، وبالتالي فهي تقع ضمن الكفاف المعطى ومنه فإنَّ $N=4$ وتصبح قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{4z^3}{z^4+1}dz = \frac{1}{4}\left[2\pi i(4-0)\right] = 2\pi i$$

❹ أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=3} \frac{4z^2+6z}{z^2+3z-10}dz$$

الحل:

إنَّ التكامل المعطى يكتب بالشكل:

$$\int_{|z|=3} \frac{4z^2+6z}{z^2+3z-10}dz = \int_{|z|=3} 2z\,\frac{2z+3}{z^2+3z-10}dz$$

أي أنَّه يملك الشكل:

$$I = \int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث:

$$\varphi(z) = 2z \quad , \quad f(z) = z^2+3z-10$$

وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي عبارة عن كثيرة حدود بالتالي يوجد لها أصفار ولا يوجد لها أقطاب، وأصفار هذه الدالة هي جذور المعادلة:

$$z^2+3z-10=0$$

لدينا:

$$\Delta=(3)^2-4(1)(-10)=9+40=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$$

$$z_1=\frac{-3+7}{2(1)}=2 \quad , \quad z_2=\frac{-3-7}{2(1)}=-5$$

وبما أنَّ:

$$|z_1|=|2|=2<3 \quad , \quad |z_2|=|-5|=5>3$$

فإنَّ أصفار الدالة $f(z)$ والواقعة داخل الكفاف هي فقط $z=2$ وهو صفر من الدرجة الأولى للدالة $f(z)$ ، وصورته وفق الدالة $\varphi(z)$ هي: $\varphi(2)=2(2)=4$ وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left[(1)(4)-0\right]=8\pi i$$

❺ أوجد قيمة التكامل:

$$\int_{|z|=5}\frac{z\sin 2z}{\sin^2 z}dz$$

الحل:

إنَّ التكامل المعطى من الشكل:

$$\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث:

$$f(z)=\sin^2 z \quad , \quad f'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z \quad , \quad \varphi(z)=z \quad , \quad C:|z|=5$$

وبما أنَّ الدالة $f(z)=\sin^2 z$ هي دالة شاملة أي تحليلية على كامل المستوي العقدي فهي لا تملك أقطاب، ولكنها تملك أصفار وهي جذور المعادلة:

$$\sin^2 z=0 \Rightarrow \sin z=0 \Rightarrow z=n\pi \;;\; n=0,\mp1,\mp2,\dots$$

وأصفار الدالة $f(z)$ والواقعة داخل الكفاف $|z|=5$ هي:

$$z=0 \;,\; z=\pi \;,\; z=-\pi$$

وهي أصفار من الدرجة الثانية للدالة $f(z)=\sin^2 z$ ، وصورها وفق الدالة $\varphi(z)=z$ هي نفسها، ومنه فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left[2(0)+2(\pi)+2(-\pi)-0\right]=0$$

أمثلة غير محلولة

احسب قيمة التكاملات التالية:

❶ $\int\limits_{|z|=5} \cot z \, dz$

❷ $\int\limits_{|z|=4} \frac{3z^4-12z^3+2z^2}{z^3-6z^2+2z+36} dz$

❸ $I=\int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad , \; C:|z|=5 \quad , \; f(z)=z^3-7z^2-z+7$

❹ $I=\int\limits_{C} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad , \; C:|z|=4 \quad , \; \varphi(z)=z^3 \quad , \; f(z)=\frac{z+i}{z-2i}$

❺ $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad ; \; C:|z|=4 \quad , \; f(z)=\frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$

تمارين على الأفكار الجديدة

❶ لتكن لدينا الدالة $f(z)=2+\frac{3}{z}$ ، والمطلوب: أوجد مقدار تغير الأرغومنت لهذا التابع عندما يرسم الدائرة $|z|=1$ ، ثمَّ أوجد عدد الدورات التي يدورها المتغير $\omega=f(z)$.

الحل:

إنَّ مقدار تغير الأرغومنت للتابع $f(z)$ يعطى بالعلاقة:

$$\Delta_c \text{Arg}(f(z))=2\pi(N-P)$$

إنَّ الدالة المعطاة تكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z}$$

ومن الواضح أنَّ أصفار الدالة $f(z)$ هي جذور المعادلة $2z+3=0$ أي $z=-\frac{3}{2}$ وهو صفر من الدرجة الأولى إلا أنَّه لا يقع ضمن الدائرة $|z|=1$ وبالتالي فإنَّ $N=0$ ، أما أقطاب الدالة $f(z)$ فهي $z=0$ وهو قطب من الرتبة الأولى ويقع ضمن الدائرة السابقة أي أنَّ $P=1$ ، وبالاستفادة مما سبق نجد أنَّ:

$$\Delta_c \text{Arg}(f(z))=2\pi(0-1)=-2\pi$$

وبالتالي فإنَّ عدد الدورات هو:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_c \text{Arg}(f(z))=2\pi(0-1)=\frac{1}{2\pi}(-2\pi)=-1$$

وبما أنَّ:

$$\omega = 2 + \frac{3}{z} \Rightarrow \omega - 2 = \frac{3}{z} \Rightarrow |\omega - 2| = \left|\frac{3}{z}\right| = \frac{3}{|z|} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow |\omega - 2| = 3$$

مما سبق نستنتج أنَّه عندما يدور المتغير z مرة واحدة بالاتجاه الموجب حول نقطة الأصل ليرسم الدائرة $|z| = 1$، فإنَّ المتغير $\omega = f(z)$ يدور مرة واحدة أيضاً بالاتجاه السالب ليرسم الدائرة $|\omega - 2| = 3$.

❷ أوجد عدد أصفار الدالة $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ في الحلقة $1 < |z| < 2$.

الحل:

بفرض أنَّ N_1 هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z| = 2$، و N_2 هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z| = 1$ عندئذٍ فإنَّ عدد أصفار الدالة $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هو $N = N_1 - N_2$.

إيجاد عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z| = 2$:

بفرض $h(z) = 2z^5$ و $g(z) = -6z^2 + z + 1$ عندئذٍ فإنَّ:

$$\forall z \in |z| = 2 \Rightarrow |h(z)| = |2z^5| = 2|z|^5 = 2(2)^5 = 64$$

$$\forall z \in |z| = 2 \Rightarrow |g(z)| = |-6z^2 + z + 1| \leq 6|z|^2 + |z| + 1 = 6(2)^2 + (2) + 1 = 27$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z| = 2 \Rightarrow |h(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z) + g(z) = f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الدائرة $|z| = 2$ وبما أنَّ للدالة $h(z) = 2z^5$ صفر من الدرجة الخامسة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ خمسة أصفار في داخلية الدائرة $|z| = 2$.

إيجاد عدد أصفار الدالة $f(z)$ في داخلية الدائرة $|z| = 1$:

بفرض $h(z) = -6z^2$ و $g(z) = 2z^5 + z + 1$ عندئذٍ فإنَّ:

$$\forall z \in |z| = 1 \Rightarrow |h(z)| = |-6z^2| = 6|z|^2 = 6(1)^2 = 6$$

$$\forall z \in |z| = 1 \Rightarrow |g(z)| = |2z^5 + z + 1| \leq 2|z|^5 + |z| + 1 = 2(1)^5 + (1) + 1 = 4$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z| = 1 \Rightarrow |h(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z) + g(z) = f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الدائرة $|z| = 1$ وبما أنَّ للدالة $h(z) = -6z^2$ صفر من الدرجة الثانية ، فإنَّ للدالة $f(z)$ صفرين في داخلية الدائرة $|z| = 1$.

وبالتالي نستنتج أنَّ عدد أصفار الدالة $f(z)$ في الحلقة $1 < |z| < 2$ هو $N = N_1 - N_2 = 5 - 2 = 3$.

3 اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

حيث أنَّ: $f(z)=z^4+z^3-z-1$.

الحل:

إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N-P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=3$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=3$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=z^4+z^3-z-1$$

لنأخذ الدالة $h(z)=z^4$ والدالة $g(z)=z^3-z-1$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |h(z)|=|z^4|=|z|^4=(3)^4=81$$

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |g(z)|=|z^3-z-1| \le |z|^3+|z|+1=(3)^3+(3)+1=31$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z|=3 \Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=3$ وبما أنَّ للدالة $h(z)=z^4$ صفر من الدرجة الرابعة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ أربعة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=3$ ، وبالتالي فإنَّ $N=4$، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (4-0)=8\pi i$$

4 اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

حيث أنَّ: $f(z)=2z^4-2z^2-2z+9$.

الحل:

إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z) = 2z^4 - 2z^2 - 2z + 9$$

لنأخذ الدالة $h(z)=9$ والدالة $g(z)=2z^4-2z^2-2z$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z \in |z|=1 \Rightarrow |h(z)| = |9| = 9$$

$$\forall z \in |z|=1 \Rightarrow |g(z)| = |2z^4 - 2z^2 - 2z| \le 2|z|^4 + 2|z|^2 + 2|z| = 2(1)^4 + 2(1)^2 + 2(1) = 6$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z \in |z|=1 \Rightarrow |h(z)| > |g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ وبما أنَّ الدالة $h(z)=9$ ثابتة فهي لا تملك أصفار ، وبالتالي فالدالة $f(z)$ لا تملك أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ ، وبالتالي فإنَّ $N=0$، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (0-0) = 0$$

❺ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

حيث أنَّ:

$$f(z) = 9z^8 + 8z^7 - 42z^5 + 3z^2 + 3$$

الحل: إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=9z^8+8z^7-42z^5+3z^2+3$$

لنأخذ الدالة $h(z)=-42z^5$ والدالة $g(z)=9z^8+8z^7+3z^2+3$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow\ |h(z)|=|-42z^5|=42|z|^5=42(1)^5=42$$

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow\ |g(z)|=|9z^8+8z^7+3z^2+3|\le 9|z|^8+8|z|^7+3|z|^2+3$$

$$=9(1)^8+8(1)^7+3(1)^2+3=23$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=1\Rightarrow\ |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ وبما أنَّ للدالة $h(z)=-42z^5$ صفر من الدرجة الخامسة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ خمسة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ ، وبالتالي فإنَّ $N=5$، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=5-0=5$$

❻ اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث أنَّ:

$$f(z)=z^7-4z^3+z-1$$

الحل: إنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(N-P)$$

حيث أنَّ N هو عدد أصفار الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$، أما P فهو عدد أقطاب الدالة $f(z)$ الواقعة داخل الكفاف $|z|=1$ ، وبما أنَّ الدالة $f(z)$ هي كثيرة حدود أي دالة صحيحة فهي لا تملك أقطاب أي أنَّ $P=0$، ولكنها تملك أصفار فقط ولإيجاد عدد هذه الأصفار سوف نعتمد على مبرهنة روشيه وذلك كما يلي:

$$f(z)=z^7-4z^3+z-1$$

لنأخذ الدالة $h(z)=-4z^3$ والدالة $g(z)=z^7+z-1$ ومن الواضح أنَّ $f(z)=h(z)+g(z)$ وبما أنَّه:

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |h(z)|=|-4z^3|=4|z|^3=4(1)^3=4$$

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |g(z)|=|z^7+z-1|\le|z|^7+|z|+1=(1)^7+(1)+1=3$$

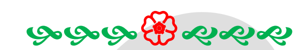
ومن الواضح أنَّ:

$$\forall z\in|z|=1 \Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$$

وبالتالي بحسب مبرهنة روشيه يكون للدالتين $h(z)+g(z)=f(z)$, $h(z)$ نفس العدد من الأصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$

وبما أنَّ للدالة $h(z)=-4z^3$ صفر من الدرجة الثالثة ، فإنَّ الدالة $f(z)$ ثلاثة أصفار في داخلية الكفاف $|z|=1$ ، وبالتالي فإنَّ $N=3$ ، مما سبق نستنتج أنَّ قيمة التكامل المعطى:

$$\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i(3-0)=6\pi i$$



7 اعتماداً على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملات التالية:

❶ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}\quad ;\quad -1<a<1$$

الحل: من أجل $a=0$ نجد أنَّ التكامل المعطى يأخذ الشكل:

$$\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi=\frac{2\pi}{\sqrt{1-(0)^2}}\quad ;\ a=0\quad \cdots\cdots(1)$$

من أجل $a\neq 0\ ;\ -1<a<1$ ، نفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi\ ;\ z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz=izd\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+a\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{2}{(az^2+2iz-a)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_j}f(z)\quad\cdots\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$az^2 + 2iz - a = 0$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4(a)(-a) = -4 + 4a^2 = -4(1-a^2) = i^2 4(1-a^2) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\,2\sqrt{1-a^2} \;\; ; \; a^2 < 1$$

$$z_1 = \frac{-(2i) + i\,2\sqrt{1-a^2}}{2(a)} = \frac{\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a} \quad , \quad z_2 = \frac{-(2i) - i\,2\sqrt{1-a^2}}{2(a)} = \frac{-\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a}$$

ومن الواضح أنَّ:

$$|z_2| = \left|\frac{-\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a}\right| = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|} > 1 \;\; ; \;\; |a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \;,\;\; 1+\sqrt{1-a^2} > 1$$

وبما أنَّ:

$$|z_1 . z_2| = 1 \Rightarrow |z_1|.|z_2| = 1 \Rightarrow |z_1| = \frac{1}{|z_2|} < 1 \;\; ; \;\; |z_2| > 1$$

وبالتالي نجد أنَّ النقطة الشاذة z_2 لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، أما النقطة z_1 فهي تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، وبالتالي نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = 2\pi i\,(b_1) \quad ; \quad b_1 = \underset{z=z_1}{\text{Res}}\left(\frac{2}{az^2 + 2iz - a}\right)$$

$$b_1 = \underset{z=z_1}{\text{Res}}\left(\frac{2}{az^2 + 2iz - a}\right) = \left.\frac{2}{2az + 2i}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{1}{az + i}\right|_{z=z_1} =$$

$$= \frac{1}{a\dfrac{\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)i}{a} + i} = \frac{1}{-i + i\sqrt{1-a^2} + i} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل هي:

$$I = 2\pi i\,(b_1) = 2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \;\; ; \; -1 < a < 1 \;, a \neq 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

من (1) و (2) يتضح أنَّ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad ; \;\; -1 < a < 1$$

ملاحظة: يترك للقارئ بطريقة مشابهة إيجاد قيمة التكامل $-1<a<1 \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$

❷ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=\pi$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi \; ; \; z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz=izd\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{3-2\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left[3-\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\right]}=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{6iz-2i\left(z^2+1\right)+\left(z^2-1\right)}$$

$$=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}=2\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\right] \quad \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\Delta=(6i)^2-4(1-2i)\left[-(1+2i)\right]=-36+4(1+4)=-36+20=-16=16i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4i$$

$$z_1=\frac{-(6i)+4i}{2(1-2i)}=\frac{-2i}{2(1-2i)}=\frac{-i(1+2i)}{5}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$$

$$z_2=\frac{-(6i)-4i}{2(1-2i)}=\frac{-10i}{2(1-2i)}=\frac{-5i\,(1+2i)}{5}=2-i$$

وبما أنَّ:

$$|z_1|=\left|\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right|=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{5}{25}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_1=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة.

وبما أنَّ:

$$|z_2|=|2-i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}>1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_2=2-i$ لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، وبالتالي تصبح العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$I=2(2\pi i\,b_1)\;\;;\;\;b_1=\underset{z=\frac{2-i}{5}}{\text{Res}}\left(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}\right)$$

وبما أن $z=\frac{2-i}{5}$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة المستكملة وبالتالي فإنَّ:

$$b_1=\underset{z=\frac{2-i}{5}}{\text{Res}}\left(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)}\right)=\left.\frac{1}{2(1-2i)z+6i}\right|_{z=\frac{2-i}{5}}$$

$$\frac{5}{2\left[(1-2i)(2-i)+15i\right]}=\frac{5}{2(-5i+15i)}=\frac{1}{4i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2(2\pi i\,b_1)=4\pi i\,b_1=4\pi i\,\frac{1}{4i}=\pi$$

❸ $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{3+\sin\theta}d\theta$$

الحل:

بفرض أن $z=e^{i\theta}\;;\;0\le\theta\le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\;\Rightarrow\;dz=izd\theta\;\Rightarrow\;d\theta=\frac{dz}{i\,z}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{3+\sin\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)}{iz\left(z^2+6iz-1\right)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\text{Res}}\,f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$iz\left(z^2+6iz-1\right)=0 \Rightarrow z=0 \quad \& \quad z^2+6iz-1=0$$

$$\Delta=(6i)^2-4(1)(-1)=-36+4=-32=32i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}i$$

$$z_1=\frac{-(6i)+4\sqrt{2}i}{2}=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i \quad , \quad z_2=\frac{-(6i)-4\sqrt{2}i}{2}=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$$

من الواضح أنَّ النقطة الشاذة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3-2\sqrt{2}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(3+2\sqrt{2}\right)i$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2|=\left|-\left(3+2\sqrt{2}\right)i\right|=3+2\sqrt{2}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{(z^2-1)}{iz(z^2+6iz-1)}\right) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^2-1}{iz^3-6z^2-iz}\right) = \frac{z^2-1}{3iz^2-12z-i}\bigg|_{z=0} = \frac{-1}{-i} = \frac{1}{i}$$

$$b_2 = \operatorname*{Res}_{z=(-3+2\sqrt{2})i}\left(\frac{(z^2-1)}{iz(z^2+6iz-1)}\right) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^2-1}{iz^3-6z^2-iz}\right) = \frac{z^2-1}{3iz^2-12z-i}\bigg|_{z=(-3+2\sqrt{2})i}$$

$$= \frac{-(-3+2\sqrt{2})^2-1}{-3i(-3+2\sqrt{2})^2-12(-3+2\sqrt{2})i-i} = \frac{-18+12\sqrt{2}}{(-3+2\sqrt{2})\left[-3i(-3+2\sqrt{2})-12i\right]-i}$$

$$= \frac{-18+12\sqrt{2}}{(-16+12\sqrt{2})i} = \frac{-9+6\sqrt{2}}{(-8+6\sqrt{2})i} = \frac{(-9+6\sqrt{2})(-8-6\sqrt{2})}{(-8+6\sqrt{2})(-8-6\sqrt{2})i} = \frac{6\sqrt{2}}{-8i} = -\frac{3\sqrt{2}}{4i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = 2\pi i(b_1+b_2) = 2\pi i\left(\frac{1}{i}-\frac{3\sqrt{2}}{4i}\right) = 2\pi\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = 2\pi-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

4 $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

الحل:

بفرض أنَّ $z = e^{i\theta}\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \ \Rightarrow\ dz = izd\theta \ \Rightarrow\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)} = \int_{|z|=1}\frac{-2i\,dz}{z^2+4z+1} = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \quad \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2+4z+1=0$$

$$\Delta=(4)^2-4(1)(1)=16-4=12 \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$z_1=\frac{-(4)+2\sqrt{3}}{2}=\left(-2+\sqrt{3}\right) \quad , \quad z_2=\frac{-(4)-2\sqrt{3}}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)\right|=2-\sqrt{3}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)$ ، فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2|=\left|-\left(2+\sqrt{3}\right)\right|=2+\sqrt{3}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}\left[\frac{-2i}{z^2+4z+1}\right]=\left.\frac{-2i}{2z+4}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}=\left.\frac{-i}{z+2}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}=\frac{-i}{-2+\sqrt{3}+2}=\frac{-i}{\sqrt{3}}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\, b_1=2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

❺ $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta=0$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi\; ;\; z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \;\Rightarrow\; dz=izd\theta \;\Rightarrow\; d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right) \quad , \quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z\left(z^2+4z+1\right)=0\;\Rightarrow\;z=0\;\&\;z^2+4z+1=0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z^2+4z+1=0$$

$$\Delta=(4)^2-4(1)(1)=16-4=12\;\Rightarrow\;\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$$

$$z_1=\frac{-(4)+2\sqrt{3}}{2}=\left(-2+\sqrt{3}\right)\quad,\quad z_2=\frac{-(4)-2\sqrt{3}}{2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1|=\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)\right|=2-\sqrt{3}<1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2=-\left(2+\sqrt{3}\right)$ ، فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2|=\left|-\left(2+\sqrt{3}\right)\right|=2+\sqrt{3}>1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}\right]=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1-z^2}{\left(z^3+4z^2+z\right)}\right]=\left.\frac{1-z^2}{\left(3z^2+8z+1\right)}\right|_{z=0}=1$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}\left[\frac{1-z^2}{z\left(z^2+4z+1\right)}\right]=\operatorname*{Res}_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}\left[\frac{1-z^2}{\left(z^3+4z^2+z\right)}\right]=\left.\frac{1-z^2}{\left(3z^2+8z+1\right)}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(-2+\sqrt{3}\right)^2}{3\left(-2+\sqrt{3}\right)^2+8\left(-2+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{1-\left(7-4\sqrt{3}\right)}{3\left(7-4\sqrt{3}\right)+8\left(-2+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{-6+4\sqrt{3}}{-\left(-6+4\sqrt{3}\right)}=-1$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=2\pi i\left(b_1+b_2\right)=2\pi i\left(1-1\right)=0$$

❻ $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{e^{2i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}{5-4\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}dz=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\operatorname{Res}}f(z)\right]\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2\left(2z^2-5z+2\right)=0\quad\Rightarrow\quad z=0\ \ \&\ \ 2z^2-5z+2=0$$

$$2z^2-5z+2=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9\ \Rightarrow\ \sqrt{\Delta}=3$$

$$z_1=\frac{-(-5)+3}{2(2)}=2\quad,\quad z_2=\frac{-(-5)-3}{2(2)}=\frac{1}{2}$$

إنَّ النقطة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب من الرتبة الثانية كونها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z=\frac{1}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، أما النقطة الشاذة $z=2$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، منه فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]$$

حيث أنَّ:

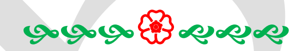
$$b_1=\underset{z=0}{\operatorname{Res}}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{-4z^3\left(2z^2-5z+2\right)+\left(4z-5\right)\left(z^4+1\right)}{\left(2z^2-5z+2\right)^2}\right]=-\frac{5}{4}$$

$$b_2=\underset{z=\frac{1}{2}}{\operatorname{Res}}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\right]=\underset{z=\frac{1}{2}}{\operatorname{Res}}\left[\frac{-\left(z^4+1\right)}{2z^4-5z^3+2z^2}\right]=\left.\frac{-\left(z^4+1\right)}{8z^3-15z^2+4z}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{17}{12}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=\pi\left(-\frac{5}{4}+\frac{17}{12}\right)=\frac{\pi}{6}$$



7) $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi$; $z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ dz=izd\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)\ \Rightarrow\ \sin^2\theta=-\frac{1}{4}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2}}{5+4\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{-1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}dz=\frac{-1}{4i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}f(z)\right]\quad\cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2\left(2z^2+5z+2\right)=0\quad\Rightarrow\quad z=0\quad\&\quad 2z^2+5z+2=0$$

$$2z^2+5z+2=0$$

$$\Delta=(5)^2-4(2)(2)=25-16=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$$

$$z_1=\frac{-(5)-3}{2(2)}=-2\quad,\quad z_2=\frac{-(5)+3}{2(2)}=-\frac{1}{2}$$

إنَّ النقطة $z=0$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب من الرتبة الثانية كونها صفر للمقام من الدرجة الثانية وليست صفراً للبسط ، وكما أنَّ النقطة الشاذة $z=-\frac{1}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وهي قطب بسيط كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، أما النقطة الشاذة $z=-2$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، ومنه فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{4z\left(z^2-1\right)\left(2z^2+5z+2\right)-(4z+5)\left(z^2-1\right)^2}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}\right]=-\frac{5}{4}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\right]=\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^4+5z^3+2z^2}\right]=\left.\frac{\left(z^2-1\right)^2}{8z^3+15z^2+4z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=\frac{-1}{4i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

❽ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

الحل:

بفرض أنَّ $z = e^{i\theta}\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)} = \int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2+4iz-1} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \quad \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$z^2 + 4iz - 1 = 0$$

$$\Delta = (4i)^2 - 4(1)(-1) = -16+4 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$$

$$z_1 = \frac{-(4i)+2\sqrt{3}i}{2} = \left(-2+\sqrt{3}\right)i \quad , \quad z_2 = \frac{-(4i)-2\sqrt{3}i}{2} = -\left(2+\sqrt{3}\right)i$$

إنَّ النقطة الشاذة $z_1 = \left(-2+\sqrt{3}\right)i$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_1| = \left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right| = 2-\sqrt{3} < 1$$

وهي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط ، أما النقطة الشاذة $z_2 = -\left(2+\sqrt{3}\right)i$ فهي لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة وذلك لأنَّ:

$$|z_2| = \left|-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right| = 2+\sqrt{3} > 1$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = 2\pi i\, b_1$$

حيث أنَّ:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\left[\frac{2}{z^2+4iz-1}\right] = \left.\frac{2}{2z+4i}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i} = \left.\frac{1}{z+2i}\right|_{z=\left(-2+\sqrt{3}\right)i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{3}\,i}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

❾ $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0 \le \theta \le 2\pi \;;\; z = e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \;\Rightarrow\; dz = izd\theta \;\Rightarrow\; d\theta = \frac{dz}{iz} \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)$$

ومنه يكون:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{5+4\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{5iz + 2\left(z^2-1\right)}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2+5iz-2} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) \quad \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$2z^2 + 5iz - 2 = 0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\Delta = (5i)^2 - 4(2)(-2) = -25+16 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3i$$

$$z_1 = \frac{-(5i)+3i}{2(2)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{-(5i)-3i}{2(2)} = \frac{-8i}{4} = -2i$$

وبما أن:

$$|z_1| = \left|-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_1 = -\frac{i}{2}$ تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة.

وبما أنَّ:

$$|z_2| = |-2i| = 2 > 1$$

وبالتالي فإنَّ النقطة الشاذة $z_2=-2i$ لا تنتمي إلى داخلية دائرة الوحدة ، وبالتالي تصبح العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$I=2\pi i\, b_1 \quad ; \quad b_1=\underset{z=-\frac{i}{2}}{\text{Res}}\left(\frac{1}{2z^2+5iz-2}\right)$$

وبما أنَّ النقطة الشاذة $z=-\frac{i}{2}$ هي صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط فهي قطب بسيط للدالة المستكملة وبالتالي فإنَّ:

$$b_1=\underset{z=-\frac{i}{2}}{\text{Res}}\left(\frac{1}{2z^2+5iz-2}\right)=\left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-\frac{i}{2}}=\frac{1}{-2i+5i}=\frac{1}{3i}$$

وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=(2\pi i\, b_1)=2\pi i\,\frac{1}{3i}=\frac{2\pi}{3}$$

❿ $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13-12\cos 2\theta}$$

الحل:

بفرض أنَّ $0\le\theta\le 2\pi \; ; \; z=e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \;\Rightarrow\; dz=izd\theta \;\Rightarrow\; d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{e^{2i\theta}}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)$$

ومنه يكون:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13-12\cos 2\theta}=\int_{|z|=1}\frac{1}{13-12\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{1}{13-6\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}$$

$$=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(6z^4-13z^2+6)}dz=-\frac{1}{i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\underset{z=z_j}{\text{Res}}\, f(z)\right] \quad \cdots(*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$6(z^2)^2-13z^2+6=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta=(-13)^2-4(6)(6)=169-144=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$$

$$(z_1)^2=\frac{-(-13)+5}{2(6)}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6} \quad , \quad (z_2)^2=\frac{-(-13)-5}{2(6)}=\frac{8}{12}=\frac{4}{6}$$

وبالتالي فإنَّ الجذور الأربعة التي تمثل النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي:

$$(z_1)^2=\frac{-(-13)+5}{2(6)}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\quad,\ (z_2)^2=\frac{-(-13)-5}{2(6)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$z=\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ z=-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ z=\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ z=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ومن الواضح أنَّ النقطتين الشاذتين $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ z=\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\right|=\left|-\sqrt{\frac{3}{2}}\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}>1$$

أما النقطتان $z=-\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ z=\sqrt{\frac{2}{3}}$ تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|=\left|-\sqrt{\frac{2}{3}}\right|=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$$

وكل منهما هي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=-\frac{1}{i}\left[2\pi i\,(b_1+b_2)\right]=-2\pi(b_1+b_2)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}\left[\frac{z}{(6z^4-13z^2+6)}\right]=\frac{z}{24z^3-26z}\bigg|_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24z^2-26}\bigg|_{z=\frac{2}{\sqrt{6}}}=\frac{1}{24\left(\frac{2}{3}\right)-26}=-\frac{1}{10}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}\left[\frac{z}{(6z^4-13z^2+6)}\right]=\frac{z}{24z^3-26z}\bigg|_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24z^2-26}\bigg|_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{24\left(\frac{2}{3}\right)-26}=-\frac{1}{10}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=-2\pi\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)=\frac{2\pi}{5}$$

❶❶ $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}d\theta=0$$

الحل:

بفرض أنَّ $0 \le \theta \le 2\pi$; $z = e^{i\theta}$ وبالتالي فإنَّ:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow dz = izd\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+\frac{1}{e^{2i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)$$

ومنه يكون:

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13-12\cos 2\theta} = \int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}{13-12\frac{1}{2}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{13z^2-6\left(z^4+1\right)}dz$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}dz = -\frac{1}{2i}\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)\right] \quad ; \ |z_j|<1 \cdots (*)$$

إنَّ النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور معادلة المقام أي جذور المعادلة:

$$6\left(z^2\right)^2-13z^2+6=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-13)^2-4(6)(6) = 169-144 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$$

$$(z_1)^2 = \frac{-(-13)+5}{2(6)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad (z_2)^2 = \frac{-(-13)-5}{2(6)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي فإنَّ الجذور الأربعة التي تمثل النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي:

$$(z_1)^2 = \frac{-(-13)+5}{2(6)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad (z_2)^2 = \frac{-(-13)-5}{2(6)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}} \ , \ z = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ , \ z = \sqrt{\frac{2}{3}} \ , \ z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ومن الواضح أنَّ النقطتين الشاذتين $z = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$ لا تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\right| = \left|-\sqrt{\frac{3}{2}}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$$

أما النقطتان $z=-\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ z=\sqrt{\frac{2}{3}}$ تنتميان إلى داخلية دائرة الوحدة كون:

$$\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|=\left|-\sqrt{\frac{2}{3}}\right|=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$$

وكل منهما هي قطب بسيط للدالة المستكملة كونها صفر للمقام من الدرجة الأولى وليست صفراً للبسط، وبالتالي فإنَّ قيمة التكامل هي:

$$I=-\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(b_1+b_2\right)\right]=-\pi\left(b_1+b_2\right)$$

حيث أنَّ:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}\left[\frac{z^2+1}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}\right]=\left.\frac{z^2+1}{24z^3-26z}\right|_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{2}{3}+1}{24\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)-26\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{5}{3}}{\left(\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)-26\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}=-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=-\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}\left[\frac{z^2+1}{\left(6z^4-13z^2+6\right)}\right]=\left.\frac{z^2+1}{24z^3-26z}\right|_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\frac{2}{3}+1}{24\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)-26\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{26\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

مما سبق نجد أنَّ قيمة التكامل المعطى هي:

$$I=-\pi\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)=0$$

انتهى الملخص

ملاحظة: قد يحتوي هذا الملخص على أخطاء مطبعية ، وشمل العديد من الأفكار باستثناء فكرتي جداء وقسمة السلاسل كطريقة لنشر بعض الدوال، ويترك هذا الأمر للطالب كونه قد درس هذه الأفكار في المقرر المعطى، ولم أستخدم طريقتي قسمة وجداء السلاسل كونه توجد طريقة بديلة أسهل، ولكن هناك تمارين لا تحل إلا عن طريق جداء وقسمة السلاسل يترك للطالب حلها.